Aufgabe H15T3A1 (12 Punkte)

Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + y^2 = z^2$. Zeigen Sie, dass das Produkt xyz durch 60 teilbar ist.

Lösung:

Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + y^2 = z^2$ vorgegeben. Wenn wir zeigen können, dass das Produkt xyz durch 3, 4 und 5 teilbar ist, dann folgt auf Grund der paarweisen Teilerfremdheit dieser Zahlen auch, dass das Produkt $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ ein Teiler von xyz ist.

Zunächst zeigen wir die Teilbarkeit von xyz durch 5. Bezeichnen wir mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Bilder von x, y, z in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, dann ist $\bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{0}$ zu zeigen. Es gilt $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}\}$, denn dies sind die einzigen Quadrate in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Nehmen wir an, dass die Elemente $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ alle ungleich Null sind. Dann muss $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ wegen $\bar{x}^2, \bar{y}^2 \in \{\bar{1}, \bar{4}\}$ mit einer der Restklassen $\bar{2}$, $\bar{5} = \bar{0}$ oder $\bar{8} = \bar{3}$ übereinstimmen. Weil aber $\bar{z}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$ gilt und $\bar{2}$, $\bar{3}$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ keine Quadrate sind, bleibt $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{z}^2 = \bar{0}$ als einzige Möglichkeit. Also ist mindestens eines der Elemente $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ gleich Null, und es folgt $\bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{0}$.

Beim Nachweis der Teilbarkeit von xyz durch 3 gehen wir genauso vor. Bezeichnen wir mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Bilder von x, y, z in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, dann ist $\bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{0}$ zu zeigen. Es gilt $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$, denn dies sind die einzigen Quadrate in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Nehmen wir an, dass die Elemente $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ alle ungleich Null sind. Dann folgt $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$. Weil aber $\bar{z}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$ gilt und $\bar{2}$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ kein Quadrat ist, muss $\bar{x}$ oder $\bar{y}$ gleich Null sein. Es folgt $\bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{0}$.

Der Nachweis von $4|(xyz)$ durch Rechnen im Restklassenring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist leider nicht möglich, deshalb betrachten wir die Gleichung $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{z}^2$ statt dessen im $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Die Quadrate von $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sind $\bar{0}$, $\bar{1}$ und $\bar{4}$. Nehmen wir an, dass $4|(xyz)$ nicht erfüllt ist. Dann müssen zwei der Zahlen x, y, z ungerade sein, die dritte ist auf Grund der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ gerade. Daraus folgt, dass zwei der Elemente $\bar{x}^2$, $\bar{y}^2$, $\bar{z}^2$ mit $\bar{1}$ übereinstimmen. Die Konstellation $\bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \bar{1}$ ist ausgeschlossen, denn dann wäre $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{2}$ kein Quadrat in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Also muss $\bar{1} + \bar{y}^2 = \bar{1}$ oder $\bar{x}^2 + \bar{1} = \bar{1}$ gelten. Es folgt $\bar{x}^2 = \bar{0}$ oder $\bar{y}^2 = \bar{0}$. Daraus wiederum ergibt sich $8|x^2$ oder $8|y^2$, und es folgt $4|x$ oder $4|y$, im Widerspruch zu $4 \nmid (xyz)$. Also war die Annahme falsch, und xyz ist durch 4 teilbar.