Aufgabe H15T2A5 (6+8 Punkte)

Sei $\xi = \sqrt{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie das Minimalpolynom von ξ über $\mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})|\mathbb{Q}$ galoissch ist und berechnen Sie die Galoisgruppe.

Lösung:

zu (a) Wir bestimmen ein Polynom in $\mathbb{Q}[x]$ mit ξ als Nullstelle. Es gilt

$$\xi = \sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \xi^2 = 2+\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \xi^2 - 2 = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (\xi^2-2)^2 = 2$$
$$\Rightarrow \quad \xi^4 - 4\xi^2 + 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad \xi^4 - 4\xi^2 + 2 = 0.$$

Also ist ξ eine Nullstelle des Polynoms $f = x^4 - 4x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Auf Grund des Eisenstein-Kriteriums angewendet auf $p = 2$ ist dieses über $\mathbb{Q}$ irreduzibel, außerdem normiert. Insgesamt handelt es sich also um das Minimalpolynom von ξ über $\mathbb{Q}$.

zu (b) Wir überprüfen, dass neben ξ auch $\eta = \sqrt{2-\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f ist. Es gilt $\eta^2 = 2-\sqrt{2}$, also

$$\eta^4 - 4\eta^2 + 2 \quad = \quad (2-\sqrt{2})^2 - 4(2-\sqrt{2}) + 2 \quad = \quad 4 - 4\sqrt{2} + 2 - 8 - 4\sqrt{2} + 2 \quad = \quad 0.$$

Weil f ein gerades Polynom ist, also $f(x) = f(-x)$ gilt, sind auch $-\xi, -\eta \in \mathbb{R}$ Nullstellen von f. Wir überzeugen uns noch davon, dass die Nullstellen $\pm\xi, \pm\eta$ voneinander verschieden sind. Weil ξ, η positiv und $-\xi, -\eta$ negativ sind, könnten höchstens ξ und η bzw. $-\xi$ und $-\eta$ übereinstimmen. Aber die reellen Zahlen $2 \pm \sqrt{2}$ sind positiv und verschieden voneinander, also können auch ihre Quadratwurzeln nicht gleich sein. Also sind $\pm\xi$, $\pm\eta$ die vier verschiedenen (reellen) Nullstellen von f.

Wir zeigen nun, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\xi)|\mathbb{Q}$ normal ist, indem wir nachweisen, dass es sich bei $\mathbb{Q}(\xi)$ um den Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ handelt. Dazu müssen wir die Gleichung

$$\mathbb{Q}(\xi) \quad = \quad \mathbb{Q}(\pm\xi, \pm\eta) \qquad \text{überprüfen.}$$

Die Inklusion „$\subseteq$“ ist offensichtlich erfüllt. Für die Inklusion „$\supseteq$“ bemerken wir zunächst, dass

$$(\xi\eta)^2 \quad = \quad (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) \quad = \quad 2^2 - 2 \quad = \quad 2$$

gilt. Wegen $\xi\eta > 0$ folgt daraus $\xi\eta = \sqrt{2}$. Nun ist mit $\xi^2 = 2 + \sqrt{2}$ auch $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}(\xi)$ enthalten. Daraus folgt $\eta = \frac{\sqrt{2}}{\xi} \in \mathbb{Q}(\xi)$ und insgesamt $\pm\xi, \pm\eta \in \mathbb{Q}(\xi)$. Damit haben wir die Gleichung verifiziert. Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\xi)|\mathbb{Q}$ ist auch separabel, denn als Zerfällungskörper ist $\mathbb{Q}(\xi)$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, und die Separabilität folgt somit auch $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$. Insgesamt ist $\mathbb{Q}(\xi)|\mathbb{Q}$ also eine Galois-Erweiterung.

Bestimmen wir nun den Isomorphietyp von $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)|\mathbb{Q})$. Weil $\mathbb{Q}(\xi)|\mathbb{Q}$ galoissch und f das Minimalpolynom von ξ über $\mathbb{Q}$ ist, gilt $|G| = [\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = \mathrm{grad}(f) = 4$. Weil die 4 ein Primzahlquadrat ist, muss G abelsch und somit ein Produkt zyklischer Gruppen sein. Daraus folgt $G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Wir zeigen, dass die erste Möglichkeit zutrifft, indem wir zeigen, dass G ein Element der Ordnung 4 besitzt. Nummerieren wir die Nullstellen von f durch $\alpha_1 = \xi$, $\alpha_2 = -\xi$, $\alpha_3 = \eta$, $\alpha_4 = -\eta$, so liefert dies einen Isomorphismus zwischen G und einer vierelementigen Untergruppe $\tilde{G}$ von S_4. Nach dem Fortsetzungssatz existiert ein Element $\sigma \in G$ mit $\sigma(\alpha_1) = \alpha_3$, also $\sigma(\xi) = \eta$ und $\sigma(2+\sqrt{2}) = \sigma(\xi^2) = \sigma(\xi)^2 = \eta^2 = 2-\sqrt{2}$. Es folgt $2+\sigma(\sqrt{2}) = 2-\sqrt{2}$, also $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Damit können wir nun die Bilder von $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ unter σ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha_2) &= \sigma(-\alpha_1) = -\sigma(\alpha_1) = -\alpha_3 = \alpha_4 \\
\sigma(\alpha_3) &= \sigma\left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\right) = \frac{\sigma(\sqrt{2})}{\sigma(\alpha_1)} = \frac{(-\sqrt{2})}{\alpha_3} = -\alpha_1 = \alpha_2 \\
\sigma(\alpha_4) &= \sigma(-\alpha_3) = -\sigma(\alpha_3) = -\alpha_2 = \alpha_1.
\end{aligned}$$

Das Element $\sigma \in G$ entspricht also der Permuation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2\ 4) \quad \text{in} \quad \tilde{G}.$$

Es gilt also $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{ord}((1\ 3\ 2\ 4)) = 4$.