Aufgabe H15T2A4 (12 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K. Sei f das Minimalpolynom von α über K und g das Minimalpolynom von β über K. Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $K(\beta)$ ist genau dann, wenn g irreduzibel über $K(\alpha)$ ist.

Lösung:

Wir zeigen, dass g genau dann irreduzibel über $K(\alpha)$ ist, wenn $[K(\alpha, \beta) : K] = \mathrm{grad}(f)\mathrm{grad}(g)$ gilt. Wortwörtlich genau beweist man, dass f genau dann irreduzibel über $K(\beta)$ ist, wenn $[K(\alpha, \beta) : K] = \mathrm{grad}(f)\mathrm{grad}(g)$ erfüllt ist; man braucht nur α mit β und f mit g zu vertauschen. Insgesamt erhalten wir so die gewünschte Äquivalenzaussage.

„$\Rightarrow$" Ist g über $K(\alpha)$ irreduzibel, dann handelt es sich wegen $g \in K[x] \subseteq K(\alpha)[x]$ und $g(\beta) = 0$ um das Minimalpolynom von β über $K(\alpha)$. Daraus folgt $[K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] = \mathrm{grad}(g)$. Weil f das Minimalpolynom von α über K ist, gilt auch $[K(\alpha) : K] = \mathrm{grad}(f)$. Mit der Gradformel erhalten wir insgesamt

$$[K(\alpha, \beta) : K] \quad = \quad [K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K] \quad = \quad \mathrm{grad}(g) \cdot \mathrm{grad}(f).$$

„$\Leftarrow$" Sei $[K(\alpha, \beta) : K] = \mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{grad}(g)$ vorausgesetzt. Mit der Gradformel folgt

$$[K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K] \quad = \quad \mathrm{grad}(g) \cdot \mathrm{grad}(f)$$

Wie oben gilt auch hier die Gleichung $[K(\alpha) : K] = \mathrm{grad}(f)$, so dass wir $[K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] = \mathrm{grad}(g)$ erhalten. Sei nun h das Minimalpolynom von β über $K(\alpha)$. Wegen $g(\beta) = 0$ und $g \in K(\alpha)[x]$ ist h ein Teiler von g. Wäre h ein *echter* Teiler von g, dann würde $[K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] = \mathrm{grad}(h) < \mathrm{grad}(g)$ folgen, im Widerspruch zu unserer vorherigen Feststellung. So aber gilt $g = h$, insbesondere ist g über $K(\alpha)$ irreduzibel.