Aufgabe H15T2A3 (14 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ die wie folgt definierte Folge ganzer Zahlen:

$$a_0 = 0 \ , \quad a_{n+1} = a_n^2 + 1 \text{ für } n \geq 0.$$

Sei $N \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Ist N ein Teiler von a_n, ist teilt N auch a_{kn} für alle $k \geq 2$.

Lösung:

Wir definieren eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Polynomen $f_n \in \mathbb{Z}[x]$ rekursiv durch $f_0 = x$ und $f_{n+1}(x) = f_n(x)^2 + 1$. Wir beweisen nun durch vollständige Induktion über n, dass $a_{k+n} = f_n(a_k)$ für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Offenbar gilt $a_{k+0} = a_k = f_0(a_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$, und setzen wir die Gleichung $a_{k+n} = f_n(a_k)$ für dieses n voraus. Auf Grund der rekursiven Definition von f_{n+1} und a_{k+n+1} und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ jeweils

$$a_{k+n+1} \quad = \quad a_{k+n}^2 + 1 \quad = \quad f_n(a_k)^2 + 1 \quad = \quad f_{n+1}(a_k).$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ und nehmen wir an, dass N ein Teiler von a_n ist. Dann gilt $f_n(a_0) \equiv a_{0+n} \equiv a_n \equiv 0 \bmod N$. Wir beweisen nun $a_{kn} \equiv 0 \bmod N$ für alle $k \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion über k. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Setzen wir nun $a_{kn} \equiv 0 \bmod N$ voraus. Dann folgt

$$a_{(k+1)n} \quad \equiv \quad a_{kn+n} \quad \equiv \quad f_n(a_{kn}) \quad \equiv \quad f_n(0) \quad \equiv \quad f_n(a_0) \quad \equiv \quad 0 \bmod N.$$

Insgesamt gilt also $a_{kn} \equiv 0 \bmod N$ und somit $N | a_{kn}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.