

Aufgabe H15T2A2 (14 Punkte)

Wieviele Elemente der Ordnung 15 gibt es in der symmetrischen Gruppe S_8 ?

Lösung:

Sei $\sigma \in S_8 \setminus \{\text{id}\}$ und $\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_r$ eine disjunkte Zykelzerlegung von σ mit Zykellängen $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r \geq 2$, wobei $r \in \mathbb{N}$ ist. Dann gilt $k_1 + \dots + k_r \leq 8$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Ordnung von σ durch die Formel $\text{ord}(\sigma) = \text{kgV}(k_1, \dots, k_r)$ gegeben ist. Damit $\text{ord}(\sigma) = 15$ gelten kann, muss also eine der Zahlen k_i von 3 und eine der Zahlen k_j von 5 geteilt werden. Dies ist nur möglich, wenn $r = 2$, $k_1 = 5$ und $k_2 = 3$ gilt. Es gilt $\text{ord}(\sigma) = 15$ also genau dann, wenn σ als disjunktes Produkt eines 3- und eines 5-Zykels dargestellt werden kann.

In S_8 gibt es genau $4! \binom{8}{5} = 4! \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 24 \cdot 56 = 1344$ Zykeln der Länge 5. Nach der Wahl des 5-Zykels ist der Träger des 3-Zykels bereits festgelegt, weil innerhalb von $\{1, 2, \dots, 8\}$ nur noch drei Stellen frei sind. Für diesen festen Träger gibt es noch genau zwei verschiedene 3-Zykeln. Insgesamt gibt es in S_8 also genau $2 \cdot 1344 = 2688$ Elemente der Ordnung 15.