Aufgabe H15T2A1 (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Matrizen A in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, die mit der Matrix

$$X \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kommutieren.

Lösung:

Für alle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt die Äquivalenz

$$AX = XA \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = a+c \ \wedge \ a+b = b+d \ \wedge \ c+d = d \quad \Leftrightarrow \quad c = 0 \ \wedge a = d \quad \Leftrightarrow \quad A \quad = \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Wegen $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ muss außerdem $a \neq 0$ gelten. Die gesuchte Teilmenge von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist also gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \ \middle| \ a \in \mathbb{C}^\times \ , \ b \in \mathbb{C} \right\}.$$