Aufgabe H15T1A3 (8 Punkte)

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie sämtliche endlichen Gruppen der Ordnung $143 = 11 \cdot 13$.

Lösung:

Sei G eine Gruppe der Ordnung 143 und ν_p für jede Primzahl p die Anzahl ihrer p-Sylowgruppen. Auf Grund der Sylowsätze ist ν_{13} ein Teiler von 11, also $\nu_{13} \in \{1, 11\}$, außerdem gilt $\nu_{13} \equiv 1 \bmod 13$. Wegen $11 \not\equiv 1 \bmod 13$ gilt also $\nu_{13} = 1$. Ebenso gilt $\nu_{11}|13$, also $\nu_{11} \in \{1, 13\}$, und außerdem $\nu_{11} \equiv 1 \bmod 11$, also $\nu_{11} = 1$ wegen $13 \equiv 2 \not\equiv 1 \bmod 11$. Wir bezeichnen die einzige 11-Sylowgruppe von G mit P und die einzige 13-Sylowgruppe von G mit Q. Aus $\nu_{11} = 1$ und $\nu_{13} = 1$ folgt $P \trianglelefteq G$ und $Q \trianglelefteq G$. Weil 11^1 und 13^1 jeweils die höchsten Potenzen von 11 bzw. 13 sind, welche die Gruppenordnung teilen, gilt $|P| = 11$ und $|Q| = 13$.

Wir zeigen nun, dass G ein inneres direktes Produkt der Untergruppen P und Q ist. Dass $P, Q \trianglelefteq G$ gilt, haben wir bereits festgestellt. Weil $|P| = 11$ und $|Q| = 13$ teilerfremd sind, gilt $P \cap Q = \{e\}$, wobei e das Neutralelement von G bezeichnet. Es bleibt $G = PQ$ zu zeigen. Wegen $P \trianglelefteq G$ ist PQ jedenfalls eine Untergruppe von G. Weil P eine Untergruppe von PQ ist, ist $|PQ|$ ein Vielfaches von $|P| = 11$. Aus $Q \leq PQ$ folgt ebenso, dass $|PQ|$ von 13 geteilt wird. Weil 11 und 13 teilerfremd sind, ist $|PQ|$ insgesamt ein Vielfaches von $11 \cdot 13 = 143$, insbesondere gilt $|PQ| \geq 143 = |G|$. Aus $PQ \subseteq G$ und $|PQ| \geq G$ wiederum folgt $G = PQ$. Damit sind alle Eigenschaften eines inneren direkten Produkts nachgewiesen.

Weil G ein inneres direktes Produkt von P und Q ist, gilt laut Vorlesung $G \cong P \times Q$. Als Gruppen von Primzahlordnung sind P und Q zyklisch; daraus folgt $P \cong \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ und $Q \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Es folgt $G \cong P \times Q \cong \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Weil 11 und 13 teilerfremd sind, kann der Chinesische Restsatz angewendet werden und liefert $G \cong \mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$. Insgesamt haben wir gezeigt, dass $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$ der einzige Isomorphietyp von Gruppen der Ordnung 143 ist.