Aufgabe H15T1A2 (4+4+4 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen.

(a) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die Anzahl der eindimensionalen $\mathbb{F}_q$-Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^n$ gleich $\frac{q^n-1}{q-1}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der zweidimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^3$ gleich der Anzahl der eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^3$ ist.

(c) Wieviele Zerlegungen von $\mathbb{F}_q^3$ in direkte Summen von $\mathbb{F}_q$-Vektorräumen $V_1 \oplus V_2$ gibt es mit $\dim_{\mathbb{F}_q}(V_1) = 2$?

Lösung:

zu (a) Jeder eindimensionale Untervektorraum von $\mathbb{F}_q^n$ hat die Form $\langle v \rangle$ für ein $v \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$. Für die Wahl des Vektors v gibt es $|\mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}| = q^n - 1$ Möglichkeiten. Für je zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$ gilt $\langle v \rangle = \langle w \rangle$ genau dann, wenn $w = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$ erfüllt ist. Somit liefern je $q-1$ Vektoren denselben eindimensionalen Untervektorraum. Dies zeigt, dass die Anzahl der eindimensionalen Untervektorräume gleich $\frac{q^n-1}{q-1}$ ist.

zu (b) Jeder zweidimensionale Untervektorraum von $\mathbb{F}_q^3$ hat die Form $\langle v_1, v_2 \rangle$, wobei (v_1, v_2) ein linear unabhängiges System von Vektoren aus $\mathbb{F}_q^3$ bezeichnet. Zunächst bestimmen wir die Anzahl der solcher Systeme (v_1, v_2). Für die Wahl des Vektors v_1 gibt es $|\mathbb{F}_q^3 - \{0\}| = q^3 - 1$ Möglichkeiten. (Der Nullvektor ist niemals Bestandteil eines linear unabhängigen Systems.) Ist v_1 bereits gewählt, so ist (v_1, v_2) für beliebiges $v_2 \in \mathbb{F}_q^3$ genau dann linear unabhängig, wenn $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$ gilt. Für die Wahl von v_2 gibt es also $|\mathbb{F}_q^3 \setminus \langle v_1 \rangle| = q^3 - q$ Möglichkeiten, für das Paar (v_1, v_2) somit $(q^3 - 1)(q^3 - q)$.

Für zwei linear unabhängige Systeme (v_1, v_2) und (w_1, w_2) gilt offenbar $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ genau dann, wenn (w_1, w_2) eine geordnete Basis von $\langle v_1, v_2 \rangle$ ist. Um zu sehen, wieviele linear unabhängige Systeme denselben Untervektorraum liefern, genügt es also, für ein festgewähltes System (v_1, v_2) die Anzahl der geordneten Basen von $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ auszurechnen. Wegen $\dim U = 2$ und $|U| = q^2$ gibt es für den ersten Basisvektor w_1 genau $|U \setminus \{0\}| = q^2 - 1$ Möglichkeiten. Ist w_1 bereits gewählt, dann gibt es genau $|U \setminus \langle w_1 \rangle| = q^2 - q$ Vektoren w_2 mit der Eigenschaft, dass (w_1, w_2) eine Basis von U ist. Also gibt es insgesamt $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ geordnete Basen von U.

Um die Anzahl der zweidimensionalen Untervektorräume zu erhalten, müssen wir nun die Anzahl der zweielementigen linear unabhängigen Systeme durch die Anzahl der Basen pro zweidimensionalem Untervektoraum dividieren. Wir erhalten für die zweidimensionalen Untervektoräume die Anzahl

$$\frac{(q^3-1)(q^3-q)}{(q^2-1)(q^2-q)} \quad = \quad \frac{q(q^3-1)(q^2-1)}{q(q^2-1)(q-1)} \quad = \quad \frac{q^3-1}{q-1}.$$

Nach Aufgabenteil (a) ist dies genau die Anzahl der eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^3$.

zu (c) Aus der Linearen Algebra ist folgendes bekannt: Ist $\mathbb{F}_q^3 = V_1 \oplus V_2$ eine Zerlegung von $\mathbb{F}_q^3$ als direkte Summe zweier Untervektorräume V_1, V_2 mit $\dim V_1 = 2$, dann gilt $\dim V_2 = \dim \mathbb{F}_q^3 - \dim V_1 = 3 - 2 = 1$. Ist dabei (v_1, v_2) eine geordnete Basis von V_1 und (v_3) eine geordnete Basis von V_3, dann ist (v_1, v_2, v_3) eine geordnete Basis von $\mathbb{F}_q^3$. Ist umgekehrt eine geordnete Basis von (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{F}_q^3$ vorgegeben und definieren wir $V_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$, $V_2 = \langle v_3 \rangle$, dann ist $V_1 \oplus V_2$ eine Zerlegung von $\mathbb{F}_q^3$ als direkte Summe. Wir müssen also die Anzahl der geordneten Basen von $\mathbb{F}_q^3$ ausrechnen und anschließend bestimmen, wieviele geordnete Basen jeweils dasselbe Paar (V_1, V_2) von Untervektorräumen liefern.

Für die Wahl des ersten Basisvektors v_1 gibt es $|\mathbb{F}_q^3 - 1| = q^3 - 1$ Möglichkeiten. Liegt v_1 fest, dann gibt es $|\mathbb{F}_q^3 - \langle v_1 \rangle| = q^3 - q$ Möglichkeiten, v_2 zu wählen. Sind schließlich v_1, v_2 vorgegeben, dann gibt es noch $|\mathbb{F}_q^3 - \langle v_1, v_2 \rangle| = q^3 - q^2$ Möglichkeiten für die Wahl von v_3. Insgesamt gibt es also $(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2) = q^3(q^3-1)(q^2-1)(q-1)$ geordnete Basen (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{F}_q^3$.

Wie wir in Teil (b) gesehen haben, liefern jeweils $(q^2-1)(q^2-q)$ Paare (v_1, v_2) denselben zweidimensionalen Untervektorraum $V_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$. Nach Teil (a) erhält man durch jeweils $q-1$ Vektoren v_3 denselben eindimensionalen Untervektorraum $V_2 = \langle v_3 \rangle$. Also liefern jeweils $(q^2-1)(q^2-q)(q-1)$ linear unabhängige Systeme dieselbe Untervektorraumzerlegung. Damit ist die Gesamtzahl der Zerlegungen von $\mathbb{F}_q^3$ als direkte Summe $V_1 \oplus V_2$ mit $\dim V_1 = 2$ und $\dim V_2 = 1$ gegeben durch

$$\frac{q^3(q^3-1)(q^2-1)(q-1)}{(q^2-1)(q^2-q)(q-1)} = \frac{q^3(q^3-1)(q^2-1)(q-1)}{q(q^2-1)(q-1)^2} = \frac{q^2(q^3-1)}{q-1} = q^2(q^2+q+1)$$

wobei im letzten Schritt die Gleichung $q^3 - 1 = (q-1)(q^2+q+1)$ verwendet wurde.