Aufgabe H15T1A1 (8 Punkte)

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung $x^6 - 2x + 4 = 0$ im Ring $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$.
Tipp: Führen Sie eine Fallunterscheidung je nach Bild von x in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch und beachten Sie, dass $64 = 2^6$.

Lösung:

Sei $\bar{a} \in \mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$ eine Lösung der Gleichung und $a \in \mathbb{Z}$ ein Repräsentant. Dann ist $a + 2\mathbb{Z}$ das Bild von $\bar{a}$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Betrachten wir zunächst den Fall, dass $a + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ gilt. Dann ist $a \in 2\mathbb{Z}$, es gibt also ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2b$. Bezeichnen wir mit $\bar{b}$ das Bild von b in $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$, dann erhalten wir

$$\bar{a}^6 - \bar{2}\bar{a} + \bar{4} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad (\bar{2}\bar{b})^6 - \bar{4}\bar{b} + \bar{4} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \overline{64}\bar{b}^6 - \bar{4}\bar{b} + \bar{4} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{4}\bar{b} = \bar{4}$$

$$\Rightarrow \quad 4b \equiv 4 \bmod 64 \quad \Rightarrow \quad b \equiv 1 \bmod 16 \quad \Rightarrow \quad \bar{b} \in \{\bar{1}, \overline{17}, \overline{33}, \overline{49}\}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{a} = \bar{2}\bar{b} \in \{\bar{2}, \overline{34}, \overline{66}, \overline{98}\} = \{\bar{2}, \overline{34}\}$$

Betrachten wir nun den Fall $a + 2\mathbb{Z} = 1 + 2\mathbb{Z}$. Unter der Annahme, dass das Bild $\bar{a} \in \mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$ eine Lösung der Gleichung ist, erhalten wir diesmal

$$a^6 - 2a + 4 \equiv 0 \bmod 64 \quad \Rightarrow \quad a^6 - 2a + 4 \equiv 0 \bmod 2 \quad \Rightarrow \quad 1^6 - 2 \cdot 1 + 4 \equiv 0 \bmod 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv 0 \bmod 2 \quad ,$$

was zu $1 \not\equiv 0 \bmod 2$ im Widerspruch steht. Also ist die Lösungsmenge der Gleichung in $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$ eine Teilmenge der zweielementigen Menge $\{\bar{2}, \overline{34}\}$.

Umgekehrt ist $\{\bar{2}, \overline{34}\}$ in der Lösungsmenge enthalten. Denn es gilt $\bar{2}^6 - \bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{4} = \overline{64} = \bar{0}$, also ist $\bar{2}$ eine Lösung. Darüber hinaus ist $\overline{34}^2 = \overline{1156} = \bar{4}$, $\overline{34}^4 = \bar{4}^2 = \overline{16}$, $\overline{34}^6 = \overline{34}^4 \cdot \overline{34}^2 = \overline{16} \cdot \bar{4} = \overline{64} = \bar{0}$ und somit $\overline{34}^6 - \bar{2} \cdot \overline{34} + \bar{4} = \bar{0} - \overline{68} + \bar{4} = \bar{0} - \bar{4} + \bar{4} = \bar{0}$. Also ist auch durch $\overline{34}$ eine Lösung gegeben.