**Aufgabe H14T3A5** (6+6 Punkte)

(a) Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3, das genau eine reelle Nullstelle besitzt. Zeigen Sie, dass dann seine Galoisgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe $S_3$ ist.

(b) Sei $p$ eine beliebige Primzahl. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms

$$x^4 - x^3 + px^2 - p \quad \in \quad \mathbb{Q}[x].$$

*Lösung:*

zu (a) Sei $G = \mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q})$ die Galoisgruppe des Polynoms $f$ über $\mathbb{Q}$. Seien außerdem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ die komplexen Nullstellen von $f$. Auf Grund der Angabe können wir $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ und $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ voraussetzen. Setzen wir $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, dann ist $L$ ein Zerfällungskörper von $f$ über $\mathbb{Q}$ und $G = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$. Aus der Vorlesung ist außerdem bekannt, dass $G$ wegen $\mathrm{grad}(f) = 3$ isomorph zu einer Untergruppe von $S_3$ ist, und dass $[L : \mathbb{Q}] = |G|$ gilt.

Wir bestimmen nun den Grad von $L|\mathbb{Q}$. Als irreduzibles Polynom mit $f(\alpha_1) = 0$ ist $f$ ein skalares Vielfaches vom Minimalpolynom von $f$. Daraus folgt $[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = \mathrm{grad}(f) = 3$. Wegen $\mathbb{Q}(\alpha_1) \subseteq \mathbb{R}$ und $L \nsubseteq \mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}(\alpha_1)$ ein echter Teilkörper von $L$. Wegen $[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ ist $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ also ein echter Teiler von $[L : \mathbb{Q}] = |G|$. Weil $G$ isomorph zu einer Untergruppe $U$ von $S_3$ ist, muss $|G|$ nach dem Satz von Lagrange andererseits ein Teiler von 6 sein. Damit bleibt als einzige Möglichkeit $|G| = 6$. Wegen $|U| = |G| = |S_3| = 6$ und $U \subseteq S_3$ gilt also $U = S_3$, d.h. die Gruppe $G$ selbst ist isomorph zu $S_3$.

zu (b) Für das Polynom $g = x^4 - x^3 + px^2 - p$ gilt $g = (x-1)x^3 + p(x-1)(x+1) = (x-1)(x^3 + px + p)$, also $g = (x-1)f$ mit $f = x^3 + px + p$. Das Polynom $f$ ist nach dem Eisenstein-Kriterium in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Weil jedes irreduzible Polynom in $\mathbb{Q}[x]$ separabel ist, besitzt es drei verschiedene komplexe Nullstellen. Als reelles Polynom vom Grad 3 hat $f$ entweder genau eine oder genau drei reelle Nullstellen. Hätte $f$ genau drei reelle Nullstellen, dann würde die Ableitung $f' = 3x^2 + p$ nach dem Satz von Rolle mindestens zwei verschiedene Nullstellen besitzen. Aber offenbar gilt $f'(a) = 3a^2 + p > 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Somit können wir Aufgabenteil (a) anwenden und erhalten $\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q}) \cong S_3$. Die Polynome $f$ und $g$ haben denselben Zerfällungskörper, denn sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $f$, dann sind $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Nullstellen von $g$. Der gemeinsame Zerfällungskörper von $f$ und $g$ ist also $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 1)$. Es gilt also $\mathrm{Gal}(g|\mathbb{Q}) = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) = \mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q}) \cong S_3$.