Aufgabe H14T3A4 (2+2+4+4 Punkte)

Sei $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ mit $\omega^2 \in \mathbb{Z}$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.

(b) Für $z = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$ sei $z^* = a - b\omega$. Dann ist die *Normabbildung*

$$N : \mathbb{Z}[\omega] \longrightarrow \mathbb{Z} \quad , \quad z \mapsto zz^*$$

multiplikativ, d.h. für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\omega]$ gilt $N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

(c) Ein Element $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ ist genau dann Einheit, wenn $|N(z)| = 1$ ist.

(d) Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{26}]$ besitzt unendlich viele Einheiten.

Lösung:

zu (a) Sei $m = \omega^2 \in \mathbb{Z}$. Wegen $1 = 1 + 0\omega$ ist 1 in $\mathbb{Z}[\omega]$ enthalten. Seien nun $z, w \in \mathbb{Z}[\omega]$ vorgegeben, $z = a + b\omega$ und $w = c + d\omega$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Zu zeigen ist $z - w \in \mathbb{Z}[\omega]$ und $zw \in \mathbb{Z}[\omega]$. Tatsächlich erkennt man an der Darstellung $z - w = (a + b\omega) - (c + d\omega) = (a - c) + (b - d)\omega$ und

$$zw \quad = \quad (a + b\omega)(c + d\omega) \quad = \quad ac + bd\omega^2 + (bc + ad)\omega \quad = \quad (ac + bdm) + (bc + ad)\omega$$

dass die beiden Elemente wegen $a - c, b - d, ac + bdm, bc + ad \in \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}[\omega]$ enthalten sind.

zu (b) Zunächst zeigen wir, dass die Abbildung $\mathbb{Z}[\omega] \to \mathbb{Z}[\omega]$, $z \mapsto z^*$ multiplikativ ist. Seien $z, w \in \mathbb{Z}[\omega]$ vorgegeben, $z = a + b\omega$ und $w = c + d\omega$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Zu zeigen ist $(zw)^* = z^*w^*$. Nun gilt einerseits $zw = (ac + bdm) + (bc + ad)\omega$, also $(zw)^* = (ac + bdm) - (bc + ad)\omega$, andererseits aber auch

$$z^*w^* \quad = \quad (a - b\omega)(c - d\omega) \quad = \quad ac + bd\omega^2 - bc\omega - ad\omega \quad = \quad (ac + bdm) - (ad + bc)\omega.$$

Um die Multiplikativität der Normabbildung zu zeigen, seien nun $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\omega]$ vorgegeben. Dann gilt $N(z_1z_2) = (z_1z_2)(z_1z_2)^* = z_1z_2z_1^*z_2^* = (z_1z_1^*)(z_2z_2^*) = N(z_1)N(z_2)$.

zu (c) Zunächst bemerken wir, dass sämtliche Werte von $N : \mathbb{Z}[\omega] \to \mathbb{C}$, $z \mapsto zz^*$ ganze Zahlen sind. Ist nämlich $z \in \mathbb{Z}[\omega]$, $z = a + b\omega$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, dann gilt $N(z) = zz^* = (a + b\omega)(a - b\omega) = a^2 - b^2\omega^2 = a^2 - b^2m \in \mathbb{Z}$. Ist nun $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ eine Einheit, dann gibt es ein $w \in \mathbb{Z}[\omega]$ mit $zw = 1$. Wegen Teil (b) folgt $N(z)N(w) = N(zw) = N(1) = 1 \cdot 1^* = 1$. Aus $|N(z)|, |N(w)| \in \mathbb{N}_0$ und $N(z)N(w) = 1$ folgt $|N(z)| = 1$ und $|N(w)| = 1$. Sei nun umgekehrt $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ mit $|N(z)| = 1$. Dann folgt $zz^* = 1$ oder $zz^* = -1$, was zu $z(-z^*) = 1$ äquivalent ist. Weil mit $z = a + b\omega$ auch die Elemente $z^* = a - b\omega$ und $-z^* = -a + b\omega$ in $\mathbb{Z}[\omega]$ liegen, ist z im Ring $\mathbb{Z}[\omega]$ auf jeden Fall eine Einheit.

zu (d) Das Element $\alpha = 5+\sqrt{26}$ ist nach Teil (c) wegen $N(\alpha) = \alpha\alpha^* = (5+\sqrt{26})(5-\sqrt{26}) = 5^2-26 = -1$ und $|N(\alpha)| = 1$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{26}]$ eine Einheit. Weil in jedem Ring die Einheitengruppe unter Multiplikation abgeschlossen ist, ist α^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Einheit. Die Elemente α^n, $n \in \mathbb{N}$ sind darüber hinaus alle verschieden, denn für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \le n$ folgt aus $\alpha^m = \alpha^n$ jeweils $\alpha^{n-m} = 1$, und wegen $\alpha > 1$ muss dann $m = n$ sein. Dies zeigt, dass $\mathbb{Z}[\omega]$ unendlich viele Einheiten enthält.