Aufgabe H14T3A3 (6+4+2+2 Punkte)

Es sei G eine abelsche Gruppe, in der jedes Element endliche Ordnung hat.

(a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in G$ Elemente mit teilerfremden Ordnungen, dann gilt $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(a)\mathrm{ord}(b)$.

(b) Seien k, ℓ zwei natürliche Zahlen. Beweisen Sie: Es gibt natürliche Zahlen k_0, ℓ_0 mit

$$\mathrm{ggT}(k_0, \ell_0) = 1 \quad , \quad k_0 \mid k \quad , \quad \ell_0 \mid \ell \quad \text{und} \quad k_0\ell_0 = \mathrm{kgV}(k, \ell).$$

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass zu beliebigen $x, y \in G$ ein $z \in G$ existiert mit $\mathrm{ord}(z) = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y))$.

(d) Beweisen Sie: Ist $m = \sup\{\mathrm{ord}(x) \mid x \in G\} < \infty$, dann gilt $\mathrm{ord}(a) \mid m$ für jedes $a \in G$.

Lösung:

zu (a) Sei $\ell = \mathrm{ord}(a)\mathrm{ord}(b)$. Auf Grund der Kommutativität von G gilt $(ab)^\ell = a^\ell b^\ell = e \cdot e = e$ und damit auch $(ab)^m = e$ für jedes Vielfache $m \in \mathbb{Z}$ von ℓ. Sei nun umgekehrt $m \in \mathbb{Z}$ mit $(ab)^m = e$ vorgegeben. Dann folgt $a^m b^m = e \Leftrightarrow a^m = b^{-m} \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Weil die Ordnungen von a und b laut Angabe teilerfremd sind, haben auch die Untergruppen $\langle a \rangle$ und $\langle b \rangle$ teilerfremde Ordnung. Daraus folgt $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$. Wegen $a^m, b^{-m} \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ gilt also $a^m = b^{-m} = e$, damit auch $b^m = e$. Die Gleichungen $a^m = b^m = e$ liefern $\mathrm{ord}(a) \mid m$ und $\mathrm{ord}(b) \mid m$. Weil $\mathrm{ord}(a)$ und $\mathrm{ord}(b)$ teilerfremd sind, ist damit auch $\ell = \mathrm{ord}(a)\mathrm{ord}(b)$ ein Teiler von m. Insgesamt haben wir gezeigt, dass für alle $m \in \mathbb{Z}$ die Äquivalenz $(ab)^m = e \Leftrightarrow \ell \mid m$ gilt, also ist $\mathrm{ord}(ab) = \ell$.

zu (b) Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Für jede Primzahl p und jedes $a \in \mathbb{N}$ sei $v_p(a)$ jeweils der maximale Wert $v \in \mathbb{N}_0$ mit $p^v \mid a$. Wir definieren nun die Primzahlmengen $P = \{p \in \mathbb{P} \mid v_p(k) \geq \max\{v_p(\ell), 1\}\}$ und $Q = \{p \in \mathbb{P} \mid v_p(\ell) > v_p(k)\}$ und setzen

$$k_0 = \prod_{p \in P} p^{v_p(k)} \qquad \text{und} \qquad \ell_0 = \prod_{p \in Q} p^{v_p(\ell)}.$$

Für alle $pin\mathbb{P}$ gilt nach Definition $v_p(k_0) \leq v_p(k)$ und $v_p(\ell_0) \leq v_p(\ell)$, also ist k_0 ein Teiler von k und ℓ_0 ein Teiler von ℓ. Wegen $P \cap Q = \varnothing$ haben k_0 und ℓ_0 keinen gemeinsamen Primteiler, also ist $\mathrm{ggT}(k_0, \ell_0) = 1$. Schließlich gilt noch

$$\begin{aligned} k_0\ell_0 &= \left(\prod_{p \in P} p^{v_p(k)}\right)\left(\prod_{p \in Q} p^{v_p(\ell)}\right) = \left(\prod_{p \in P} p^{\max\{v_p(k), v_p(\ell)\}}\right)\left(\prod_{p \in Q} p^{\max\{v_p(k), v_p(\ell)\}}\right) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max\{v_p(k), v_p(\ell)\}} = \mathrm{kgV}(k, \ell). \end{aligned}$$

zu (c) Seien $x, y \in G$ vorgegeben, $k = \mathrm{ord}(x)$ und $\ell = \mathrm{ord}(y)$. Seien k_0, ℓ_0 natürliche Zahlen, die bezüglich k, ℓ die in Teil (b) aufgezählten Eigenschaften haben. Sei $x_0 = x^{k/k_0}$ und $y_0 = y^{\ell/\ell_0}$. Dann gilt $\mathrm{ord}(x_0) = k_0$ und $\mathrm{ord}(y_0) = \ell_0$. Weil k_0 und ℓ_0 teilerfremd sind, erfüllen x_0 und y_0 nach Teil (a) die Gleichung $\mathrm{ord}(x_0 y_0) = \mathrm{ord}(x_0)\mathrm{ord}(y_0) = k_0\ell_0 = \mathrm{kgV}(k, \ell)$. Also hat das Element $z = x_0 y_0$ die gewünschte Eigenschaft.

zu (d) Sei $a \in G$ ein beliebiges Element. Weil G endlich ist, existiert ein $b \in G$ mit $\mathrm{ord}(b) = \max\{\mathrm{ord}(x) \mid x \in G\} = m$. Nach Teil (c) existiert aber auch ein Element $c \in G$ mit $\mathrm{ord}(c) = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord}(a), m)$. Weil m die maximale Elementordnung in G ist, muss $\mathrm{kgV}(\mathrm{ord}(a), m) = m$ gelten. Somit ist m ein Vielfaches von $\mathrm{ord}(a)$, es gilt also $\mathrm{ord}(a) \mid m$ für alle $a \in G$.