**Aufgabe H14T3A1** (11 Punkte)

Es sei $G$ eine Gruppe mit 2014 Elementen. Zeigen Sie, dass $G$ einen zyklischen Normalteiler der Ordnung $1007 = 19 \cdot 53$ besitzt.

*Lösung:*

Für jede Primzahl $p$ sei $\nu_p$ die Anzahl der $p$-Sylowgruppen von $G$. Auf Grund der Sylowsätze gilt $\nu_{53} \mid 2 \cdot 19$, also $\nu_{53} \in \{1, 2, 19, 38\}$, außerdem $\nu_{53} \equiv 1 \bmod 53$. Wegen $2 \not\equiv 1 \bmod 53$, $19 \not\equiv 1 \bmod 53$ und $38 \not\equiv 1 \bmod 53$ folgt $\nu_{53} = 1$. Ebenso gilt $\nu_{19} \mid 2 \cdot 53$, also $\nu_{19} \in \{1, 2, 53, 106\}$, außerdem $\nu_{19} \equiv 1 \bmod 19$. Wegen $2 \not\equiv 1 \bmod 19$, $53 \equiv 15 \not\equiv 1 \bmod 19$ und $106 \equiv 11 \not\equiv 1 \bmod 19$ erhalten wir $\nu_{19} = 1$. Sei $P$ eine 19- und $S$ eine 53-Sylowgruppe von $G$. Als einzige 19-Sylowgruppe ist $P$ ein Normalteiler von $G$, und aus demselben Grund gilt dasselbe für $S$. Weil das Komplexprodukt zweier Normalteiler einer Gruppe wieder ein Normalteiler ist, handelt es sich bei $N = PS$ um einen Normalteiler von $G$.

Es bleibt zu zeigen, dass $N$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 1007 ist. Dazu überprüfen wir, dass $N$ ein inneres direktes Produkt von $P$ und $S$ ist. Die Bedingung $N = PS$ ist nach Definition erfüllt. Weil die Ordnungen $|P| = 19$ und $|S| = 53$ teilerfremd sind, gilt $P \cap S = \{e\}$. Schließlich gilt $P \trianglelefteq N$ und $S \trianglelefteq N$, weil $P$ und $S$ sogar Normalteiler von $G$ sind. Damit sind alle Eigenschaften eines inneren direkten Produkts nachgewiesen, und es folgt $N \cong P \times S$. Es gilt $|P| = 19$ und $|S| = 53$, denn dies sind jeweils die größten Potenzen der Primzahlen 19 und 53, welche die Gruppenordnung 2014 teilen. Als Gruppen von Primzahlordnung sind $P$ und $S$ zyklisch, also gilt $P \cong \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ und $S \cong \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$. Durch Anwendung des Chinesischen Restsatzes auf die teilerfremden Zahlen 19 und 53 erhalten wir schließlich

$$N \quad \cong \quad P \times S \quad \cong \quad \mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/53\mathbb{Z} \quad \cong \quad \mathbb{Z}/1007\mathbb{Z}.$$

Also ist $N$ tatsächlich eine zyklische Gruppe der Ordnung 1007.