Aufgabe H14T2A5 (12 Punkte)

Die reelle (6×6)-Matrix A habe den sechsfachen Eigenwert 1 mit der geometrischen Vielfachheit 3. Es gelte weiterhin $A = E_6 + N$ mit der Einheitsmatrix E_6 und einer nilptenten Matrix N mit Nilpotenzindex 3, d.h. $N^3 = 0$, aber $N^2 \neq 0$. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.

Lösung:

Sei J die Jordan-Normalform von A, r die Anzahl der Jordanblöcke und $m_1, ..., m_r$ deren Größe, wobei wir $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_r$ voraussetzen. Dann gilt $m_1 + ... + m_r = 6$. Laut Vorlesung stimmt die geometrische Vielfachheit $\dim \mathrm{Eig}(A, 1) = 3$ mit der Anzahl der Jordanblöcke überein, es gilt also $r = 3$. Wegen $N^3 = 0$ und $N^2 \neq 0$ ist die maximale Länge einer Jordankette von N gleich drei, dies ist zugleich die maximale Größe eines Jordanblocks. Es gilt also $m_1 = 3$, und aus $m_1 + m_2 + m_3 = 6$ und $m_1 \geq m_2 \geq m_3$ folgt $m_2 = 2$ und $m_3 = 1$. Damit ist die Jordansche Normalform gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$