Aufgabe H14T2A4 (6+6 Punkte)

Es seien H eine Untergruppe der endlichen Gruppe G und P eine p-Sylowgruppe von G für eine Primzahl p, die die Ordnung von H teilt.

(a) Zeigen Sie, dass es stets ein $g \in G$ gibt, so dass $H \cap g^{-1}Pg$ eine p-Sylowgruppe von H ist.

(b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass $H \cap P$ nicht notwendig eine p-Sylowgruppe von H ist.

Lösung:

zu (a) Sei P_H eine beliebig gewählte p-Sylowgruppe von H. Dann ist H von p-Potenzordnung und folglich eine p-Untergruppe von G. Nun ist auf Grund der Sylowsätze jede p-Untergruppe von G in einer p-Sylowgruppe enthalten. Es gibt also eine p-Sylowgruppe P' von G mit $P_H \subseteq P'$. Außerdem besagen die Sylowsätze, dass je zwei p-Sylowgruppen zueinander konjugiert sind. Es gibt also ein $g \in G$ mit $P' = g^{-1}Pg$, und wir erhalten $P_H \subseteq g^{-1}Pg \cap H$. Nun ist $g^{-1}Pg \cap H$ eine p-Untergruppe von H, aber P_H ist als p-Sylowgruppe bereits eine maximale p-Untergruppe von H. Also muss $P_H = g^{-1}Pg$ gelten.

zu (b) Sei $p = 2$, $G = S_3$, $H = \langle(1\ 2)\rangle$ und $P = \langle(1\ 3)\rangle$. Dann ist H eine Untergruppe von G mit $2 \mid |H|$, und P ist wegen $|G| = 2^1 3^1$ und $|P| = 2^1$ eine 2-Sylowgruppe von G. Andererseits gilt $|H| = 2^1$ und $|H \cap P| = |\{\mathrm{id}\}| = 2^0$, also ist $H \cap P$ keine 2-Sylowgruppe von H.