Aufgabe H14T2A2 (2+5+5 Punkte)

Es sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $d \geq 3$, das mindestens eine Nullstelle $a \in \mathbb{R}$ und mindestens eine Nullstelle $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hat. Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(L|\mathbb{Q})$ mit $\sigma(a) = b$.

(b) Die komplexe Konjugation kann zu einem Automorphismus von L über $\mathbb{Q}$ eingeschränkt werden.

(c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Aut}(L|\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch.

Lösung:

zu (a) Durch Anwendung des Fortsetzungssatzes auf den Homomorphismus $\mathrm{id}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, das irreduzible Polynom f und die Nullstellen $a, b \in \mathbb{C}$ erhält man einen $\mathbb{Q}$-Isomorphismus $\tilde{\sigma} : \mathbb{Q}(a) \to \mathbb{Q}(b)$ mit $\tilde{\sigma}(a) = b$, den wir als $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\mathbb{Q}(a) \to \mathbb{C}$ betrachten können. Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, kann $\tilde{\sigma}$ laut Vorlesung auf jede algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}(a)$ fortgesetzt werden. Es gibt also einen $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\sigma : L \to \mathbb{C}$ mit $\sigma(a) = b$. Weil L Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[x]$ über $\mathbb{Q}$ ist, handelt es sich bei $L|\mathbb{Q}$ um eine normale Erweiterung. Damit ist jeder $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $L \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{Q}$-Automorphismus von L, insbesondere auch die Abbildung σ.

zu (b) Sei $\tilde{\iota} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ die komplexe Konjugation. Wegen $\bar{c} = c$ für alle $c \in \mathbb{Q}$ handelt es sich um einen $\mathbb{Q}$-Homomorphismus. Die Einschränkung $\iota = \tilde{\iota}|_L$ ist dann ein $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $L \to \mathbb{C}$. Weil $L|\mathbb{Q}$ normal ist (siehe oben), kann ι als $\mathbb{Q}$-Automorphismus von L aufgefasst werden.

zu (c) Seien $\sigma, \iota \in \mathrm{Aut}(L|\mathbb{Q})$ die Elemente aus Aufgabenteil (a) bzw. (b). Wegen $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt einerseits

$$(\iota \circ \sigma)(a) \quad = \quad \iota(\sigma(a)) \quad = \quad \iota(b) \quad = \quad \bar{b}$$

wegen $a \in \mathbb{R}$ andererseits

$$(\sigma \circ \iota)(a) \quad = \quad \sigma(\iota(a)) \quad = \quad \sigma(a) \quad = \quad b.$$

Aus $\bar{b} \neq b$ folgt $\iota \circ \sigma \neq \sigma \circ \iota$. Dies zeigt, dass die Gruppe $\mathrm{Aut}(L|\mathbb{Q})$ nicht abelsch ist.