**Aufgabe H14T2A1** (2+2+8 Punkte)

Es sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Ein Element $e \in R$ ist *idempotent* genau dann, wenn $e^2 = e$ ist (zum Beispiel sind 0 und 1 idempotent). Zeigen Sie:

(a) Wenn $e$ idempotent ist, dann ist auch $1-e$ idempotent, und es ist $e \cdot (1-e) = 0$.

(b) Ist $e$ idempotent, dann sind die Ideale $eR$ und $(1-e)R$ relativ prim.

(c) Genau dann ist $R$ isomorph zu einem direkten Produkt von zwei Ringen, die beide keine Nullringe sind, wenn es in $R$ ein idempotentes Element $e \notin \{0,1\}$ gibt.

*Lösung:*

zu (a) Sei $e \in R$ idempotent. Dann gilt $(1-e)^2 = (1-e)(1-e) = 1-e-e+e^2 = 1-e-e+e = 1-e$, also ist auch $1-e$ idempotent. Außerdem gilt $e(1-e) = e-e^2 = e-e = 0$.

zu (b) Nach Definition sind $eR$ und $(1-e)R$ relativ prim, wenn $eR+(1-e)R = R$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass 1 in $eR+(1-e)R$ enthalten ist. Nun gilt $e = e \cdot 1 \in R$ und $1-e = (1-e)\cdot 1 \in (1-e)R$, also $1 = e+(1-e) \in eR+(1-e)R$. (Beim Beweis wurde die Idempotenz von $e$ nicht verwendet. Die Aussage ist somit für beliebige Ringelemente richtig, nicht nur für die idempotenten.)

zu (c) „$\Rightarrow$“ Zunächst zeigen wir: Ist $e \in R$ idempotent, dann ist die Teilmenge $R_1 \subseteq R$ gegeben durch $R_1 = Re$ unter Addition und Multiplikation abgeschlossen. Seien $a_1, b_1 \in R_1$ vorgegeben. Dann gibt es $a, b \in R$ mit $a_1 = ae$ und $b_1 = be$. Es folgt $a_1 + b_1 = ae + be = (a+b)e \in R_1$ und

$$a_1 b_1 \quad = \quad (ae)(be) \quad = \quad (ab)e^2 \quad = \quad (ab)e \quad \in \quad R_1.$$

Nun zeigen wir, dass $R_1$ mit der eingeschränkten Addition und Multiplikation ein Ring ist. Assoziativitäts- und Kommutativitätsgesetz sind in $(R_1,+)$ gültig, weil es sogar in $R \supseteq R_1$ gilt. Wegen $0 = 0e$ ist das Nullelement in $R_1$ enthalten, und es gilt $a_1 + 0 = a_1$ für alle $a_1 \in R_1$, weil die Gleichung sogar für alle Elemente aus $R$ gilt. Für jedes $a_1 \in R_1$ ist auch $-a_1$ in $R_1$ enthalten, denn nach Definition von $R_1$ gibt es ein $a \in R$ mit $a_1 = ae$, und es folgt $-a_1 = (-a)e \in R_1$. Die Gleichung $a_1 + (-a_1) = 0$ zeigt, dass jedes Element in $(R_1,+)$ ein Inverses besitzt. Insgesamt ist $(R_1,+)$ damit eine abelsche Gruppe. Auch in $(R_1,\cdot)$ übertragen sich Assoziativitäts- und Kommutativitätsgesetz von $R$ auf $R_1$. Sei $a_1 \in R_1$ vorgegeben und $a \in R$ mit $a_1 = ae$. Dann gilt $a_1 e = (ae)e = ae^2 = ae = a_1$. Dies zeigt, dass $e$ ein Neutralelement in $(R_1,\cdot)$ ist. Also ist $(R_1,\cdot)$ ein kommutatives Monoid. Schließlich gilt in $R_1$ auch das Distributivgesetz, weil es sogar in $R$ gültig ist. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass $(R_1,+,\cdot)$ ein Ring ist, mit Null- und Einselement gegeben durch $0_{R_1} = 0$ und $1_{R_1} = e$. Man beachte, dass $R_1$ aber im allgemeinen *kein* Teilring von $R$ ist, weil die Einselemente von $R_1$ und $R$ im Fall $e \neq 1$ voneinander verschieden sind.

Sei nun $e \in R$ ein idempotentes Element mit $e \neq 0,1$. Nach Teil (a) ist auch $1-e$ idempotent, also erhalten wir (wie soeben beschrieben) eine Ringstruktur auf $R_1 = Re$ und $R_2 = R(1-e)$. Weder $R_1$ noch $R_2$ ist ein Nullring, denn es gilt $1_{R_1} = e \neq 0 = 0_{R_1}$ und $1_{R_2} = 1-e \neq 0 = 0_{R_2}$. Wir zeigen nun, dass durch

$$\phi : R \longrightarrow R_1 \times R_2 \quad , \quad a \mapsto (ae, a(1-e))$$

ein Isomorphismus von Ringen definiert ist. Zunächst gilt $\phi(1) = (e, 1-e) = (1_{R_1}, 1_{R_2}) = 1_{R_1 \times R_2}$. Seien nun $a, b \in R$ vorgegeben. Dann gilt

$$\phi(a+b) \quad = \quad ((a+b)e, (a+b)(1-e)) \quad = \quad (ae+be, a(1-e)+b(1-e)) \quad =$$
$$(ae, a(1-e)) + (be, b(1-e)) \quad = \quad \phi(a) + \phi(b)$$

und

$$\phi(a)\phi(b) \quad = \quad (ae, a(1-e))(be, b(1-e)) \quad = \quad ((ae)(be), a(1-e)b(1-e)) \quad =$$
$$(abe^2, ab(1-e)^2) \quad = \quad (abe, ab(1-e)) \quad = \quad \phi(ab).$$

Also ist $\phi$ ein Homomorphismus von Ringen. Zum Nachweis der Surjektivität sei $(a_1, b_1) \in R_1 \times R_2$ vorgegeben. Dann gibt es $a, b \in R$ mit $a_1 = ae$ und $b_1 = b(1-e)$, und wir erhalten

$$\phi(a_1 + b_1) \quad = \quad ((a_1+b_1)e, (a_1+b_1)(1-e)) \quad = \quad ((ae + b(1-e))e, (ae + b(1-e))(1-e))$$
$$= \quad (ae^2 + b(1-e)e, ae(1-e) + b(1-e)^2) \quad = \quad (ae, b(1-e)) \quad = \quad (a1, b_1).$$

Sei nun $a \in R$ mit $\phi(a) = (0,0)$. Dann gilt $(ae, a(1-e)) = (0,0)$, also $ae = a(1-e) = 0$ und damit $a = a(e + (1-e)) = ae + a(1-e) = 0 + 0 = 0$. Also ist $\phi$ auch injektiv, insgesamt ein Isomorphismus.

„$\Leftarrow$“ Seien $R_1, R_2$ zwei Ringe, die beides keine Nullringe sind, und $\phi : R \to R_1 \times R_2$ ein Isomorphismus von Ringen. Sei $e = \phi^{-1}(1_{R_1}, 0_{R_2})$. Dann ist $e$ idempotent, denn auf Grund der Homomorphismus-Eigenschaft von $\phi^{-1}$ gilt

$$e^2 \quad = \quad \phi^{-1}((1_{R_1}, 0_{R_2}))^2 \quad = \quad \phi^{-1}((1_{R_1}, 0_{R_2})^2) \quad = \quad \phi^{-1}((1_{R_1}, 0_{R_2})) \quad = \quad e.$$

Wäre $e = 0$, dann würde $(0_{R_1}, 0_{R_2}) = \phi(0_R) = \phi(e) = (1_{R_1}, 0_{R_2})$ folgen, im Widerspruch dazu, dass $R_1$ kein Nullring ist und folglich $0_{R_1} \neq 1_{R_1}$ gilt. Wäre $e = 1$, dann würden wir $(1_{R_1}, 1_{R_2}) = \phi(1_R) = \phi(e) = (1_{R_1}, 0_{R_2})$ folgen. Aber $0_{R_2} = 1_{R_1}$ steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $R_2$ kein Nullring ist. Also muss $e \neq 0, 1$ gelten.