Aufgabe H14T1A5 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl, die bei Division durch n den Rest $n-1$ hat, für alle $n \in \{2,3,4,5,6\}$.

Lösung:

Laut Angabe suchen wir die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $m \equiv n-1 \bmod n \Leftrightarrow m \equiv -1 \bmod n$ für $n \in \{2,3,4,5,6\}$. Es genügt, das kleinste $m \in \mathbb{N}$ mit $m \equiv -1 \bmod n$ für $n \in \{3,4,5\}$ zu bestimmen. Denn aus $m \equiv -1 \bmod 4$ folgt $m \equiv -1 \bmod 2$. Außerdem gilt

$$m \equiv -1 \bmod 2 \text{ und } m \equiv -1 \bmod 3 \quad \Rightarrow \quad 2|(m+1) \text{ und } 3|(m+1) \Rightarrow \quad 6|(m+1) \quad \Rightarrow \quad m \equiv -1 \bmod 6$$

weil 2 und 3 teilerfremd sind. Es gilt $3 \cdot 4 \cdot 5 = 3 \cdot 20 = 60$, wir suchen also ein $m \in \mathbb{N}$ mit der gewünschten Eigenschaft im Bereich $1 \leq m \leq 60$. Laut Chinesischem Restsatz ist durch

$$\phi : \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \quad , \quad a + 60\mathbb{Z} \mapsto (a+3\mathbb{Z}, a+4\mathbb{Z}, a+5\mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus von Ringen gegeben. Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq 60$ gilt also

$$m \equiv -1 \bmod 3 \ \wedge \ m \equiv -1 \bmod 4 \ \wedge \ m \equiv -1 \bmod 5 \quad \Leftrightarrow$$

$$(m+3\mathbb{Z}, m+4\mathbb{Z}, m+5\mathbb{Z}) = (-1+3\mathbb{Z}, -1+4\mathbb{Z}, -1+5+\mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\phi(m+60\mathbb{Z}) = \phi(-1+60\mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad m+60\mathbb{Z} = -1+60\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad m \equiv -1 \bmod 60.$$

Die Bedingung ist also äquivalent dazu, dass ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $m = -1 + 60k$ existiert. Wegen

$$1 \leq -1 + 60k \leq 60 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq 60k \leq 61 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{60} \leq k \leq \tfrac{61}{60}$$

ist nur $k = 1$, also $m = 59$ möglich. Somit ist 59 die einzige Zahl im Bereich $1 \leq m \leq 60$, welche die Kongruenzbedingung erfüllt, und damit auch die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft.