Aufgabe H14T1A4 (3+9 Punkte)

Die endliche Gruppe G operiere transitiv auf der endlichen Menge $X \neq \varnothing$, so dass jedes $g \in G$ mindestens einen Fixpunkt hat. Zeigen Sie:

(a) Es bezeichne G_x den Stabilisator von x in G. Dann gilt

$$G \setminus \{1\} \quad = \quad \bigcup_{x \in X} (G_x \setminus \{1\})$$

(b) Zeigen Sie, dass X nur ein Element hat.

Lösung:

zu (a) Die Inklusion „$\supseteq$“ ist offensichtlich, denn nach Definition ist G_x für jedes $x \in X$ eine Untergruppe von G. Es gilt also $G_x \subseteq G$ und $G_x \setminus \{1\} \subseteq G \setminus \{1\}$ für alle $x \in X$. Zum Nachweis von „$\subseteq$” sei $g \in G \setminus \{1\}$ vorgegeben. Laut Angabe hat g einen Fixpunkt, es gilt also $g \cdot x = x$ für ein $x \in X$. Nach Definition von G_x bedeutet dies, dass g in $G_x \setminus \{1\}$ und damit erst recht in der Vereinigung auf der rechten Seite enthalten ist.

zu (b) Laut Vorlesung gilt $|G(x)| = (G : G_x)$ für alle $x \in X$ (Bahnlänge = Index des Stabilisators). Nun ist auf Grund der Angabe die Gruppenoperation transitiv, es gilt also $X = G(x)$ und somit $|X| = (G : G_x)$ für alle $x \in X$. Nehmen wir nun an, dass $k = |X|$ größer als 1 ist. Wegen

$$\frac{|G|}{|G_x|} \quad = \quad (G : G_x) \quad = \quad |X| \quad = \quad k$$

ist die Ordnung $|G_x|$ für alle $x \in X$ gleich. Setzen wir $m = |G_{x_0}|$ für ein beliebig gewähltes $x_0 \in X$, dann gilt $G = mk$. Wir werden nun die Anzahl der Elemente in $\bigcup_{x \in X}(G_x \setminus \{1\})$ nach oben abschätzen und auf diese Weise einen Widerspruch herleiten. Dazu untersuchen wir, wieviele *verschiedene* Untergruppen in der Vereinigung maximal vorkommen.

Zunächst bemerken wir, dass die Gruppen G_x alle zueinander konjugiert sind. Ist nämlich $x \in X$ vorgegeben, dann existiert auf Grund der Transitivität der Gruppenoperation ein $g \in G$ mit $g \cdot x_0 = x$. Es gilt nun $gG_{x_0}g^{-1} = G_x$ für dieses g, denn für alle $h \in G$ gilt die Äquivalenz

$$h \in gG_{x_0}g^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g_1 \in G_{x_0} : h = gg_1g^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1}hg \in G_{x_0} \quad \Leftrightarrow \quad (g^{-1}hg) \cdot x_0 = x_0$$

$$\Leftrightarrow \quad (hg) \cdot x_0 = g \cdot x_0 \quad \Leftrightarrow \quad h \cdot (g \cdot x_0) = g \cdot x_0 \quad \Leftrightarrow \quad h \cdot x = x \quad \Leftrightarrow \quad h \in G_x.$$

Liegen nun $g_1, g_2 \in G$ in derselben Linksnebenklasse modulo G_{x_0}, dann gilt $g_1G_{x_0} = g_2G_{x_0}$, es gibt also ein $g \in G_{x_0}$ mit $g_2 = g_1g$. Daraus folgt $g_2G_{x_0}g_2^{-1} = g_1gG_{x_0}g^{-1}g_1^{-1} = g_1G_{x_0}g_1^{-1}$. Es gibt also höchstens $k = (G : G_{x_0})$ verschiedene, zu G_{x_0} konjugierte Untergruppen. Daraus folgt, dass in der Vereinigung $\bigcup_{x \in X}(G_x \setminus \{1\})$ höchstens k verschiedene Untergruppen vorkommen. Diese haben alle die Ordnung m, die Vereingung enthält also $\leq k(m-1) = km - k$ Elemente. Wegen $|G| = (G : G_{x_0})|G_{x_0}| = mk$ sind in $G \setminus \{1\}$ aber $km - 1 > km - k$ Elemente enthalten, somit können die Mengen nicht übereinstimmen. Es muss also $k = 1$ gelten.