Aufgabe H14T1A3 (10 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, und es seien $\alpha, \beta \in L$, so dass $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ beide algebraisch über K sind. Zeigen Sie, dass dannn auch α und β algebraisch über K sind.

Lösung:

Sei $M = K(\alpha + \beta, \alpha\beta)$. Weil $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ algebraisch über K sind, ist $M|K$ laut Vorlesung eine algebraische Körpererweiterung. (Dies bedeutet, dass *alle* Elemente in M algebraisch über K sind.) Wir betrachten nun das Polynom

$$f \quad = \quad (x-\alpha)(x-\beta) \quad = \quad x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta \quad \in \quad M[x].$$

Wegen $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ und $0 \neq f \in M[x]$ sind α und β beide algebraisch über M. Damit ist $M(\alpha,\beta)|M$ eine algebraische Körperweiterung. Mit $M|K$ und $M(\alpha,\beta)|M$ ist laut Vorlesung auch die Erweiterung $M(\alpha,\beta)|K$ algebraisch. Dies wiederum bedeutet, dass α und β algebraisch über K sind.