Aufgabe H14T1A2 (2+6+6 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der nicht der Nullring ist. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Betrachten sie die Teilmenge

$$\mathfrak{p}R[x] \quad = \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \;\middle|\; r \in \mathbb{N}, a_i \in \mathfrak{p} \text{ und } f_i \in R[x] \text{ für } 1 \leq i \leq n \right\}$$

im Polynomring $R[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}R[x]$ ein Ideal von $R[x]$ ist.

(b) Geben Sie einen Isomorphismus $R[x]/\mathfrak{p}R[x] \to (R/\mathfrak{p})[x]$ an (mit Beweis).

(c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}R[x]$ ein Primideal, aber kein maximales Ideal von $R[x]$ ist.

Lösung:

zu (a) Sei $I = \mathfrak{p}R[x]$. Setzen wir $r = 1$, $a_1 = 0$ und $f_1 = 0$, dann gilt $a_1 \in \mathfrak{p}$ auf Grund der Idealeigenschaft von $\mathfrak{p}$, und somit ist $0 = a_1 f_1$ in $\mathfrak{p}R[x]$ enthalten. Seien nun $f, g \in I$ und $h \in R[x]$ vorgegeben. Zu zeigen ist $f + g \in I$ und $hf \in I$. Wegen $f, g \in R$ gibt es $r, s \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_r \in \mathfrak{p}$, $b_1, ..., b_s \in \mathfrak{p}$ und $f_1, ..., f_r \in R[x]$, $g_1, ..., g_s \in R[x]$, so dass

$$f = \sum_{i=1}^{r} a_i f_i \qquad \text{und} \qquad g = \sum_{i=1}^{s} b_i g_i \qquad \text{gilt.}$$

Setzen wir $c_i = a_i$ und $h_i = f_i$ für $1 \leq i \leq r$, $c_{i+r} = b_i$ und $h_{i+r} = g_i$ für $1 \leq i \leq s$, dann gilt $c_i \in \mathfrak{p}$ für $1 \leq i \leq r + s$ und $h_i \in R[x]$ für $1 \leq i \leq r + s$. Wegen

$$f + g \quad = \quad \left(\sum_{i=1}^{r} a_i f_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{s} b_i g_i \right) \quad = \quad \left(\sum_{i=1}^{r} c_i h_i \right) + \left(\sum_{i=r+1}^{r+s} c_i h_i \right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r+s} c_i h_i$$

ist also auch $f + g$ in I enthalten. Sei nun $k_i = hf_i \in R[x]$ für $1 \leq i \leq r$. Dann gilt

$$hf \quad = \quad h \left(\sum_{i=1}^{r} a_i f_i \right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} a_i (hf_i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} a_i k_i.$$

Dies zeigt, dass auch hf in I liegt. Wir bemerken noch, dass $\mathfrak{p}R[x]$ das von $\mathfrak{p}$ erzeugte Ideal in $R[x]$ ist. Denn einerseits ist $\mathfrak{p}$ wegen $1 \in R[x]$ und $a = a \cdot 1$ für alle $a \in \mathfrak{p}$ in $\mathfrak{p}R[x]$ enthalten. Ist andererseits J ein beliebiges Ideal in $R[x]$ mit $\mathfrak{p} \subseteq J$, dann enthält J auf Grund der Idealeigenschaft auch alle Produkte af mit $a \in R$ und $f \in R[x]$ und damit auch alle Summen der Form $\sum_{i=1}^{s} a_i f_i$ mit $s \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathfrak{p}$ und $f_i \in R[x]$.

zu (b) Für jedes $a \in R$ sei $\bar{a}$ das Bild in $R/\mathfrak{p}$ unter dem kanonischen Epimorphismus. Allgemein gilt: Ist $\phi : S \to T$ ein Ringhomomorphismus und $c \in T$ beliebig vorgegeben, dann gibt es einen eindeutig Ringhomomorphismus $\hat{\phi} : S[x] \to T$ mit $\hat{\phi}|_S = \phi$ und $\hat{\phi}(x) = c$, wobei $S[x]$ den Polynomring über S bezeichnet. Dies wenden wir auf den Homomorphismus $\phi : R \to (R/\mathfrak{p})[x]$, $a \mapsto \bar{a}$ und das Element $x \in (R/\mathfrak{p})[x]$ an und erhalten einen Homomorphismus $\hat{\phi} : R[x] \to (R/\mathfrak{p})[x]$ mit $\hat{\phi}|_R = \phi$ und $\hat{\phi}(x) = x$.

Nun wenden wir auf $\hat{\phi}$ den Homomorphiesatz für Ringe an. Zunächst ist $\hat{\phi}$ offenbar surjektiv. Ist nämlich $\bar{f} = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k x^k$ vorgegeben, mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $\bar{a}_k \in R/\mathfrak{p}$ für $0 \leq k \leq n$, und bezeichnet $a_k \in R$ jeweils ein Urbild von $\bar{a}_k$ unter dem kanonischen Epimorphismus, dann gilt

$$\hat{\phi} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \hat{\phi}(a_k x^k) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \phi(a_k) x^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k x^k \quad = \quad \bar{f} \quad ,$$

also ist durch $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in R[x]$ ein Urbild von $\bar{f}$ gegeben. Es bleibt zu zeigen, dass $\ker(\hat{\phi}) = \mathfrak{p}R[x]$ gilt. Für jedes $a \in \mathfrak{p}$ ist das Bild in $R/\mathfrak{p}$ unter dem kanonischen Epimorphsimus gleich Null, also gilt auch $\hat{\phi}(a) = \bar{0}$. Also liegt $\mathfrak{p}$ im Kern von $\hat{\phi}$, und damit auch das von $\mathfrak{p}$ in $R[x]$ erzeugte Ideal $\mathfrak{p}R[x]$. Zum Nachweis von „$\subseteq$ sei $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \ker(\hat{\phi})$ vorgegeben, mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_k \in R$ für $0 \le k \le n$. Es gilt dann

$$\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k x^k \quad = \quad \hat{\phi}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) \quad = \quad \bar{0}$$

und somit $\bar{a}_k = 0$ und $a_k \in \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}R[x]$ für $0 \le k \le n$. Weil $\mathfrak{p}R[x]$ nach Teil (a) ein Ideal in $R[x]$ ist, folgt $a_k x^k \in \mathfrak{p}R[x]$ für $0 \le k \le n$ und schließlich $f \in \mathfrak{p}R[x]$. Damit ist $\ker(\hat{\phi}) = \mathfrak{p}R[x]$ nachgewiesen. Der Homomorphiesatz für Ringe liefert nun einen (eindeutig bestimmten) Isomorphismus $\bar{\phi} : R[x]/\mathfrak{p}R[x] \to (R/\mathfrak{p})[x]$ von Ringen mit $\bar{\phi}(f + \mathfrak{p}R[x]) = \phi(f)$ für alle $f \in R[x]$.

zu (c) Weil $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R ist, handelt es sich bei dem Faktorring $R/\mathfrak{p}$ laut Vorlesung um einen Integritätsbereich. Damit ist auch der Polynomring $(R/\mathfrak{p})[x]$ über $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich. Nach Aufgabenteil (b) gilt $R[x]/\mathfrak{p}R[x] \cong (R/\mathfrak{p})[x]$, also ist auch $R[x]/\mathfrak{p}R[x]$ ein Integritätsbereich. Daraus wiederum folgt, dass $\mathfrak{p}R[x]$ in $R[x]$ ein Primideal ist.

Wäre das Ideal $\mathfrak{p}R[x]$ sogar maximal, dann wäre $(R/\mathfrak{p})[x] \cong R[x]/\mathfrak{p}R[x]$ ein Körper. Ein Polynomring $S[x]$ über einem Integritätsbereich S ist aber niemals ein Körper, weil die Polynome $f \in S[x]$ vom Grad ≥ 1 in $S[x]$ nicht invertierbar sind. Gäbe es nämlich ein $g \in S[x]$ mit $fg = 1$, dann würde man

$$\mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad} \quad = \quad \mathrm{grad}(fg) \quad = \quad \mathrm{grad}(1) \quad = \quad 0$$

erhalten, was zu $\mathrm{grad}(f) \ge 1$ und $\mathrm{grad}(g) \ge 0$ im Widerspruch steht.