Aufgabe H13T3A4 (6 Punkte)

Sei p eine Primzahl, $e, n \in \mathbb{N}$ und G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ mit p^e Elementen. Zeigen Sie: Es gibt einen Spaltenvektor $0 \neq v \in \mathbb{F}_p^n$ mit $\gamma \cdot v = v$ für alle $\gamma \in G$.
Hinweis: Betrachten Sie die Bahnlängen von G auf $\mathbb{F}_p^n$.

Lösung:

Sei $V = \mathbb{F}_p^n$ und die Abbildung $\cdot : G \times V \to V$ gegeben durch $(A, v) \mapsto Av$, also durch gewöhnliche Matrix-Vektor-Multiplikation. Die Einheitsmatrix $I \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ ist zugleich das Neutralelement der Gruppe G. Seien nun $v \in V$ und $A, B \in G$ vorgegeben. Dann gilt $I \cdot v = Iv = v$ und $A \cdot (B \cdot v) = A \cdot (Bv) = A(Bv) = (AB)v = (AB) \cdot v$. Dies zeigt, dass durch $\cdot$ eine Gruppenoperation von G auf V definiert ist.

Sei nun $F \subseteq V$ die Fixpunktmenge der Operation und $R \subseteq V$ ein Repräsentantensystem aller Bahnen mit mehr als einem Element. Auf Grund der Bahngleichung gilt

$$p^n \quad = \quad |V| \quad = \quad |F| + \sum_{A \in R} (G : G_A).$$

Für jedes $A \in R$ ist $(G : G_A)$ ein Teiler von $|G| = p^n$ größer als 1, also eine p-Potenz der Form p^e mit $e \geq 1$. Insbesondere ist $(G : G_A)$ für jedes $A \in R$ durch p teilbar. Daraus folgt, dass die Summe $\sum_{A \in R}(G : G_A)$ durch p teilbar ist. Da auch p^n durch p teilbar ist, folgt aus der Gleichung, dass $|F|$ durch p teilbar ist. Nun ist wegen $A \cdot 0_V = A0_V = 0_V$ der Nullvektor 0_V auf jeden Fall in F enthalten. Aus $|F| \geq 1$ und $p \mid |F|$ folgt $|F| \geq p \geq 2$. Also muss es mindestens ein Element $v \neq 0_V$ in F geben. Nach Definition der Fixpunktmenge erfüllt dieses Element $A \cdot v = v$ für alle $A \in G$.