Aufgabe H13T3A3 (6 Punkte)

(a) Eine Permutation σ sei das Produkt zweier disjunkter Zykel der teilerfremden Längen k und ℓ. Welche Ordnung hat σ ?

(b) Sei $a(n)$ die größte Elementordnung in der symmetrischen Gruppe S_n. Man zeige $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{n} = \infty$.

Lösung:

zu (a) Sei $\sigma = \rho\tau$, wobei ρ einen k-Zykel und τ einen ℓ-Zykel bezeichnet und ρ, τ disjunkt sind. Dann sind ρ und τ vertauschbar, also $\rho\tau = \tau\rho$, außerdem gilt $\mathrm{ord}(\rho) = k$ und $\mathrm{ord}(\tau) = \ell$. Wir zeigen, dass $\mathrm{ord}(\sigma) = k\ell$ gilt. Zunächst einmal gilt auf Grund der Vertauschbarkeit von ρ und τ

$$\sigma^{k\ell} \quad = \quad \rho^{k\ell}\sigma^{k\ell} \quad = \quad (\rho^k)^\ell(\sigma^\ell)^k \quad = \quad \mathrm{id}^\ell \mathrm{id}^k \quad = \quad \mathrm{id}$$

und somit $\mathrm{ord}(\sigma) \mid (k\ell)$. Sei nun $m \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl mit $\sigma^m = \mathrm{id}$. Dann gilt $\rho^m\tau^m = \mathrm{id}$ und $\rho^m = (\tau^{-1})^m \in \langle\rho\rangle \cap \langle\tau\rangle$. Da $|\langle\rho\rangle| = \mathrm{ord}(\rho) = k$ und $|\langle\tau\rangle| = \mathrm{ord}(\tau) = \ell$ teilerfremd sind, ist der Durchschnitt von $\langle\rho\rangle$ und $\langle\tau\rangle$ gleich $\{\mathrm{id}\}$, und es folgt $\rho^m = (\tau^{-1})^m = \mathrm{id}$. Aus $\rho^m = \mathrm{id}$ und $\mathrm{ord}(\rho) = k$ folgt $k \mid m$. Aus $\tau^m = (\tau^{-1})^{-m} = \mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$ und $\mathrm{ord}(\tau) = \ell$ folgt $\ell \mid m$. Weil k und ℓ teilerfremd sind, erhalten wir $(k\ell) \mid m$. Damit ist $\mathrm{ord}(\sigma) = k\ell$ nachgewiesen.

Hinweis: Eventuell könnten man auch einfach argumentieren, dass σ eine Permutation mit Zerlegungstyp (k, ℓ) ist, und dann die Regel $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{kgV}(k, \ell)$ aus der Vorlesung zitieren. Wegen der Teilerfremdheit von k und ℓ gilt außerdem $\mathrm{kgV}(k, \ell) = k\ell$. Wahrscheinlich war das vom Aufgabensteller aber nicht so vorgesehen.

zu (b) Sei $m = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Wegen $m + (m+1) \le \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} = n$ kann dann in S_n ein Produkt σ aus disjunkten Zyklen der Länge m und $m+1$ gebildet werden. Die Zahlen m und $m+1$ sind teilerfremd, denn jeder gemeinsame Teiler $d \in \mathbb{N}$ von m und $m+1$ teilt auch $(m+1) - m = 1$ und muss somit gleich 1 sein. Mit Aufgabenteil (a) und wegen $m > \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$ erhalten wir nun $\mathrm{ord}(\sigma) = m(m+1) > \frac{1}{4}(n-3)(n-1) = \frac{1}{4}(n^2 - 4n + 3)$. Es folgt

$$\frac{a(n)}{n} \quad > \quad \frac{1}{4}\left(n - 4 + \frac{3}{n}\right) \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\lim_n \frac{1}{4}\left(n - 4 + \frac{3}{n}\right) = +\infty$ folgt $\lim_n \frac{a(n)}{n} = +\infty$.