Aufgabe H13T3A2 (6 Punkte)

Sei $f = x^4 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass f genau zwei reelle Nullstellen x_1 und x_2 hat.

(b) Zeigen Sie, dass f über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.

(c) Sei $g = x^3 + 4x - 1$, und $a \in \mathbb{C}$ komplex. Zeigen Sie, dass es genau dann komplexe Zahlen $b, c, d \in \mathbb{C}$ gibt mit $f = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, wenn $g(a^2) = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass g über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.

(e) Sei $g(a^2) = 0$ für $a \in \mathbb{R}$ reell. Zeigen Sie, dass $a \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$.

(f) Zeigen Sie, dass x_1 oder x_2 nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Lösung:

zu (a) Da bei einem reellen Polynom die nicht-reellen Nullstellen immer in konjugiert-komplexen Paaren auftreten, hat f als reelles Polynom vom Grad 4 entweder keine, genau zwei oder genau vier Nullstellen. Wegen $f(-1) = 1 > 0$ und $f(0) = -1 < 0$ hat f nach dem Zwischenwertsatz eine (reelle) Nullstelle im offenen Intervall $]-1, 0[$, wegen $f(1) = -1 < 0$ und $f(2) = 13 > 0$ eine weitere Nullstelle im Intervall $]1, 2[$. Also besitzt f genau zwei oder genau vier reelle Nullstellen. Hätte f vier reelle Nullstellen, dann müsste es nach dem Satz von Rolle zwischen diesen Nullstellen mindestens drei verschiedene relle Nullstellen der Ableitung $f' = 4x^3 - 1$ geben. Nochmalige Anwendung des Satzes von Rolle würde ergeben, dass $f'' = 12x^2$ mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen hat. Aber offenbar ist die Null die einzige reelle Nullstelle von f''. Also hat f' höchstens zwei und f höchstens drei, auf Grund unserer Vorüberlegung also genau zwei Nullstellen.

zu (b) Wir zeigen, dass das Bild $\bar{f} = x^4 + x + \bar{1}$ von f in $\mathbb{F}_2[x]$ irreduzibel ist. Nach dem Reduktionskritierium und dem Gaußschen Lemma folgt daraus die Irreduziblität von f in $\mathbb{Z}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$. Wegen $\bar{f}(\bar{0}) = \bar{1} \neq \bar{0}$ und $\bar{f}(\bar{1}) = \bar{3} = \bar{1} \neq \bar{0}$ hat $\bar{f}$ jedenfalls keine Nullstelle in $\mathbb{F}_2$. Wäre $\bar{f}$ dennoch reduzibel, dann müsste $\bar{f}$ als Produkt zweier irreduzibler Polynome vom Grad 2 darstellbar sein. Aber das einzige irreduzible Polynom vom Grad 2 in $\mathbb{F}_2[x]$ ist $x^2+x+\bar{1}$, und es gilt $(x^2+x+\bar{1})(x^2+x+\bar{1}) = x^4+x^2+\bar{1} \neq \bar{f}$. Also ist $\bar{f}$ tatsächlich in $\mathbb{F}_2[x]$ irreduzibel.

zu (c) Allgemein gilt: Ist $f = x^4 + px^2 + qx + r \in \mathbb{Q}[x]$ mit $p, q, r \in \mathbb{Q}[x]$, dann ist die *kubische Resolvente* von f gegeben durch $g = x^3 - px^2 - 4rx + 4pr - q^2$. Sind $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in \mathbb{C}$ vier verschiedene Nullstellen von f, dann sind die Nullstellen von g gegeben durch $\theta_1\theta_2 + \theta_3\theta_4$, $\theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_4$ und $\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_3$. Dies wenden wir nun auf das Polynom f aus der Aufgabenstellung an. Hier ist $p = 0$ und $q = r = -1$, folglich ist $g = x^3 + 4x - 1$ die kubische Resolvente von f. Wir bemerken noch, dass in unserem Fall für die Nullstellen von f die Gleichung $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0$ gilt, weil der Koeffizient des Monoms x^3 in f gleich Null ist. Da auch der Koeffizient des Monoms x^2 gleich Null ist, gilt außerdem

$$\theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_3 + \theta_2\theta_4 + \theta_3\theta_4 \quad = \quad 0.$$

"$\Rightarrow$" Setzen wir voraus, dass zum vorgegebenen $a \in \mathbb{C}$ tatsächlich Elemente $b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $f = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ existieren. Wegen $f = (x - \theta_1)(x - \theta_2)(x - \theta_3)(x - \theta_4)$ folgt daraus, dass a die negative Summe von zwei der Nullstellen ist. Nach eventueller Vertauschung der Nullstellen können wir $a = -(\theta_1 + \theta_2)$ annehmen. Auf Grund der Gleichung von oben gilt nun

$$a^2 = (\theta_1 + \theta_2)^2 = -(\theta_1 + \theta_2)(\theta_3 + \theta_4) = -(\theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3 + \theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_4) = \theta_1\theta_2 + \theta_3\theta_4.$$

Also ist a^2 eine Nullstelle von g.

"$\Leftarrow$" Setzen wir $g(a^2) = 0$ voraus, dann gilt nach eventueller Vertauschung der Nullstellen $a^2 = \theta_1\theta_2 + \theta_3\theta_4$. Auf Grund der Rechnung aus dem letzten Schritt und der Gleichung von oben erhalten wir $a^2 = (\theta_1 + \theta_2)^2$, also $a = -(\theta_1 + \theta_2)$ oder $a = \theta_1 + \theta_2 = -(\theta_3 + \theta_4)$. In jedem Fall ist a die negative Summe zweier Nullstellen des Polynoms f. Dies zeigt, dass $b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $f = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ existieren.

Bemerkung: Das Vorkommen der kubischen Resolvente macht die Aufgabe meiner Meinung nach vom Schwierigkeitsgrad her grenzwertig, zumal noch nicht einmal ein Hinweis gegeben wurde. Eventuell gibt es eine einfachere Lösung, die ohne dieses Konzept auskommt, aber ich habe keine gefunden.

zu (d) Wegen $\mathrm{grad}(g) = 3$ genügt es nachzuweisen, dass g keine rationale Nullstelle besitzt. Da g in $\mathbb{Z}[x]$ liegt und normiert ist, müsste eine solche Nullstelle ganzzahlig und ein Teiler des konstanten Terms -1 sein. Die einzigen Teiler von -1 sind ± 1. Es gilt aber $g(-1) = -6 \neq 0$ und $g(1) = 4 \neq 0$. Also hat g keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$.

zu (e) Wie wir in Teil (c) gezeigt haben, folgt aus $g(a^2) = 0$, dass a die negative Summe zweier Nullstellen von f ist. Wegen $a \in \mathbb{R}$ müssen diese Nullstellen entweder beide reell oder zueinander konjugiert-komplex sein. Bezeichnen wir die beiden nicht-reellen Nullstellen von f mit x_3 und x_4, dann gilt also $a = -(x_1 + x_2)$ oder $a = -(x_3 + x_4) = x_1 + x_2$. In jedem Fall ist a in $\mathbb{Q}[x_1, x_2]$ enthalten.

zu (f) Nehmen wir an, dass x_1 und x_2 beide mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Da die konstruierbaren Zahlen laut Vorlesung einen Teilkörper von $\mathbb{C}$ bilden, ist dann auch $x_1 + x_2$ und somit nach Teil (e) auch a mit Zirkel und Lineal konstruierbar, ebenso a^2. Daraus folgt, dass der Körpergrad $[\mathbb{Q}(a^2) : \mathbb{Q}]$ eine 2-Potenz ist. Aber andererseits ist a^2 eine Nullstelle von g, und dieses Polynom ist nach (d) über $\mathbb{Q}$ irreduzibel. Daraus folgt $[\mathbb{Q}(a^2) : \mathbb{Q}] = \mathrm{grad}(g) = 3$, im Widerspruch zur Feststellung, dass der Grad eine 2-Potenz ist. Also war unsere Annahme falsch.