Aufgabe H13T2A5 (6 Punkte)

Sei S_5 die Permutationsgruppe von 5 Ziffern. Wie viele Elemente in S_5 haben die Ordnung 4? Wie viele Untergruppen von S_5 haben 4 Elemente?

Lösung:

Sei $\sigma \in S_5$ ein Element in S_5 ungleich id vom Zerlegungstyp $(k_1, ..., k_r)$ mit $r \geq 1$ und $k_1 \geq ... \geq k_r \geq 2$. Dann gilt $k_1 + ... + k_r \leq 5$. Damit σ ein Element der Ordnung 4 ist, muss $\mathrm{kgV}(k_1, ..., k_r) = 4$ gelten, und dies ist nur möglich, wenn mindestens eine der Zahlen k_i von 4 geteilt wird. Der einzige Zerlegungstyp mit dieser Eigenschaft ist (4), also sind die Elemente der Ordnung 4 gerade die 4-Zykel. Deren Anzahl in S_5 ist geben durch $(4-1)!\binom{5}{4} = 6 \cdot 5 = 30$. Es gibt also genau 30 Elemente der Ordnung 4 in S_5.

Jede Untergruppe U der Ordnung 4 von S_5 ist abelsch, da es sich bei 4 um ein Primzahlquadrat handelt. Nach dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen ist damit isomorph zu einem äußeren direkten Produkt zyklischer Gruppen. Es gilt also $U \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, wenn U zyklisch ist, und $U \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, falls U nicht zyklisch ist. Wir bestimmen nun die Zahl der zyklischen und die Anzahl der nicht-zyklischen Untergruppen der Ordnung 4 von S_5. Eine zyklische Untergruppe der Ordnung 4 enthält genau $\varphi(4) = 2$ Elemente der Ordnung 4, wobei φ die Eulersche φ-Funktion bezeichnet. Umgekehrt ist jedes Element σ mit $\mathrm{ord}(\sigma) = 4$ in genau einer zyklischen Untergruppe der Ordnung 4 enthalten, nämlich in $\langle\sigma\rangle$. Es gibt also genau doppelt soviel Elemente der Ordnung 4 wie zyklische Untergruppen der Ordnung 4 in S_5. Somit ist die Anzahl der zyklischen Untergruppen der Ordnung 4 gleich $\frac{30}{2} = 15$.

Bestimmen wir nun die Anzahl der nicht-zyklischen Untergruppen der Ordnung 4 von S_5. Jede solche Untergruppe U enthält neben id genau drei Elemente der Ordnung 2. Dabei kann es sich um Transpositionen oder um Doppeltranspositionen handeln. Wir betrachten zunächst den Fall, dass die drei Elemente $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ der Ordnung 2 in U alles Doppeltranspositionen sind. Jede Doppeltransposition besitzt genau einen Fixpunkt in $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Als erstes bemerken wir, dass alle drei Elemente denselben Fixpunkt i haben. Denn nehmen wir an, dass σ_1 die Zahl i als Fixpunkt besitzt, aber das Element σ_2 einen davon verschiedenen Fixpunkt j. Dann gilt $(\sigma_2 \circ \sigma_1)(i) = \sigma_2(i) \neq i$ und $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(i) \neq \sigma_2(i)$, da $\sigma_2(i)$ kein Fixpunkt von σ_1 ist. Es wäre also $\sigma_2 \circ \sigma_1 \neq \sigma_1 \circ \sigma_2$, im Widerspruch dazu, dass U eine abelsche Gruppe ist. Ist nun i der gemeinsame Fixpunkt aller Elemente der Untergruppe U, und bezeichnen wir mit a, b, c, d die vier von i verschiedenen Elemente der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, dann muss

$$U \quad = \quad \{\mathrm{id}\ ,\ (a\ b)(c\ d)\ ,\ (a\ c)(b\ d)\ ,\ (a\ d)(b\ c)\}$$

gelten, denn neben den drei angegebenen gibt es in S_5 keine Doppeltranspositionen mit Fixpunkt i. Die Untergruppe ist also durch den Fixpunkt i bereits festgelegt. Weil es für i fünf Möglichkeiten gibt, existieren in S_5 genau 5 Untergruppen, deren Elemente $\neq$ id alles Doppeltranspositionen sind.

Nun betrachten wir diejenigen nicht-zyklischen Untergruppen oder Ordnung 4 in S_5, die mindestens eine Transposition enthalten. Sei U eine solche Untergruppe und $(i\ j) \in U$ eine Transposition. Zunächst einmal gibt es in U kein Element ρ, dessen Träger genau eines der Elemente i, j enthält. Denn nehmen wir an, $\rho \in U$ wäre ein Element, dass nur i, aber nicht j im Träger enthält. Dann würde $(\rho \circ (i\ j))(i) = \rho(j) = j$ und $((i\ j) \circ \rho)(j) = (i\ j)(j) = i$ gelten. Es wäre dann $\rho \circ (i\ j) \neq (i\ j) \circ \rho$, was aber unmöglich ist, da es sich bei U um eine abelsche Gruppe handelt. Enthält U neben $(i\ j)$ eine weitere Transposition $(k\ \ell)$, dann muss also $\{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \varnothing$ gelten. In diesem Fall ist dann

$$U \quad = \quad \{\mathrm{id}\ ,\ (i\ j)\ ,\ (k\ \ell)\ ,\ (i\ j)(k\ \ell)\}. \qquad (*)$$

Für eine Doppeltransposition in U ist nur die Gestalt $(i\ j)(k\ \ell)$ oder $(i\ k)(j\ \ell)$ möglich, wobei wiederum $\{i,j\}\cap\{k,\ell\}=\varnothing$ gilt. Denn wie oben bemerkt, enthält die Doppeltransposition entweder beide Elemente i,j oder keins davon im Träger, wobei die zweite Möglichkeit aber ausscheidet, weil insgesamt nur die fünf Elemente $1,2,...,5$ zur Verfügung stehen. Im Fall $(i\ k)(j\ \ell)\in U$ wäre $(i\ j)\cdot(i\ k)(j\ \ell)=(i\ k\ j\ \ell)$, was aber im Widerspruch dazu steht, dass U nicht zyklisch ist und somit keine Elemente der Ordnung 4 enthält. Im ersten Fall hat U wieder die Gestalt (*). Die einzigen nicht-zyklischen Untergruppen der Ordnung 4 sind also die Untergruppen der Form (*), wobei $\{i,j,k,\ell\}$ alle vierelementigen Teilmengen von $\{1,...,5\}$ durchläuft. Für die Wahl der Transposition $(i\ j)$ gibt es $\binom{5}{2}=10$ Möglichkeiten, danach noch 3 Möglichkeiten für die Wahl von $(k\ \ell)$. Da die Reihenfolge, in der $(i\ j)$ und $(k\ \ell)$ gewählt werden, für die Untergruppe keine Rolle spielt, kommen wir insgesamt auf $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3=15$ Untergruppen dieses Typs.

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass S_5 genau $15+5+15=35$ Untergruppen der Ordnung 4 besitzt.