Aufgabe H13T2A3 (2+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt.

(b) Sei K ein Körper, der eine galoissche Erweiterung mit Galoisgruppe A_4 besitzt. Zeigen Sie, dass eine endliche Körpererweiterung $K \subseteq F$ mit $[F : K] = 4$ existiert, so dass $F = K(\alpha)$ für alle $\alpha \in F \setminus K$ gilt.

Lösung:

zu (a) Nehmen wir an, dass U eine Untergruppe von A_4 mit $|U| = 6$ ist. Da 3 ein Primteiler von $|U|$ ist, gibt es eine Untergruppe V von U mit $|V| = 3$. Wegen $(U : V) = \frac{|U|}{|V|} = \frac{6}{3} = 2$ ist V ein Normalteiler von V. Folglich gilt $U \subseteq N_{A_4}(V)$, wobei $N_{A_4}(V)$ den Normalisator von V in A_4 bezeichnet. Wegen $12 = 2^2 \cdot 3$ ist V eine 3-Sylowgruppe von A_4, und laut Vorlesung ist die ν_3 Anzahl der 3-Sylowgruppen durch $(A_4 : N_{A_4}(V))$ gegeben. (Dies war ein Spezialfall der Gleichung $(G : G_x) = |G(x)|$ bei Gruppenoperationen, angewendet auf die Operation der Gruppe A_4 auf ihren 3-Sylowgruppen.)

Wegen $|U| \leq |N_{A_4}(V)|$ gilt $(A_4 : N_{A_4}(V)) \leq (A_4 : U) = \frac{12}{6} = 2$, es dürfte also nur zwei 3-Sylowgruppen in A_4 geben. Aber die Gruppe A_4 enthält (genau wie S_4) insgesamt acht 3-Zykel. Weil jede 3-Sylowgruppe von A_4 zyklisch von Ordnung 3 ist, enthält sie jeweils genau zwei Elemente der Ordnung 3, und umgekehrt ist jedes Element der Ordnung 3 in genau einer 3-Sylowgruppe enthalten. Die Anzahl der 3-Sylowgruppen in A_4 beträgt also in Wirklichkeit $\frac{8}{2} = 4$. Der Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war.

zu (b) Sei $L|K$ eine Galois-Erweiterung mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L|K) \cong A_4$, und sei U eine Untergruppe von G der Ordnung 3; diese existiert, weil 3 ein Primteiler von $|G| = |A_4| = 12$ ist. Für den Fixkörper $F = L^U$ zur Untergruppe U gilt nach dem Hauptsatz der Galoistheorie $[F : K] = (G : U) = \frac{12}{3} = 4$. Sei nun $\alpha \in F \setminus K$ vorgegeben. Zu zeigen ist $F = K(\alpha)$. Nehmen wir an, dass $K(\alpha)$ ein echter Teilkörper von F ist. Auf Grund der Gradformel gilt $[F : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K] = [F : K] = 4$, somit muss $[K(\alpha) : K]$ ein Teiler von 4 sein, also mit einer der Zahlen $1, 2, 4$ übereinstimmen.

Aus $K(\alpha) \subseteq F$ und $[F : K] = 4 = [K(\alpha) : K]$ würde $K(\alpha) = F$ folgen, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Im Fall $[K(\alpha) : K] = 1$ wäre $K(\alpha) = K$ und $\alpha \in K$, was ebenfalls ausgeschlossen ist. Also bleibt $[K(\alpha) : K] = 2$ als einzige Möglichkeit. Aber für die Untergruppe $V = \mathrm{Gal}(L|K(\alpha))$ von G würde dann laut Galoistheorie $\frac{|G|}{|V|} = (G : V) = [K(\alpha) : K] = 2$ und $|V| = \frac{|G|}{2} = \frac{12}{2} = 6$ gelten. Also hätte G und wegen $G \cong A_4$ auch die Gruppe A_4 eine Untergruppe der Ordnung 6. Aber dies steht zum Ergebnis von Teil (a) im Widerspruch.