Aufgabe H13T2A2 (6 Punkte)

Die endliche Gruppe G operiere (von links) auf der endlichen Menge X. Für jedes $\sigma \in G$ bezeichne $i(\sigma) = |\{x \in X \mid \sigma x = x\}|$ die Anzahl der Fixpunkte von σ. Zeigen Sie, dass sich die Anzahl der Bahnen der Operation zu

$$|G \backslash X| \quad = \quad \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} i(\sigma)$$

berechnet.

Hinweis: Bestimmen Sie die Kardinalität der Teilmenge

$$Z \quad = \quad \{(\sigma, x) \in G \times X \mid \sigma x = x\} \quad \subseteq \quad G \times X$$

auf zwei verschiedene Arten.

Lösung:

Die Menge Z ist disjunkte Vereinigung $Z = \bigcup_{\sigma \in G} Z_\sigma$ darstellbar, mit $Z_\sigma = \{(\sigma, x) \in G \times X \mid \sigma x = x\}$. Bezeichnen wir mit $F_\sigma = \{x \in X \mid \sigma x = x\}$ die Fixpunktmenge eines Elements σ, dann ist durch $x \mapsto (\sigma, x)$ offenbar eine Bijektion zwischen F_σ und A_σ definiert. Die Mengen F_σ und A_σ sind also gleichmächtig. Daraus folgt

$$|Z| \quad = \quad \sum_{\sigma \in G} |Z_\sigma| \quad = \quad \sum_{\sigma \in G} |A_\sigma| \quad = \quad \sum_{\sigma \in G} i(\sigma).$$

Andererseits besitzt Z auch die disjunkte Zerlegung $Z = \bigcup_{x \in X} B_x$ mit $B_x = \{(\sigma, x) \in G \times X \mid \sigma(x) = x\}$. Bezeichnet $G_x = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x\}$ jeweils die Stabilisatorgruppe von $x \in X$, dann ist durch $G_x \to B_x$, $\sigma \mapsto (\sigma, x)$ wiederum eine Bijektion definiert. Daraus folgt

$$|Z| \quad = \quad \sum_{x \in X} |B_x| \quad = \quad \sum_{x \in X} |G_x|.$$

Laut Vorlesung gilt für jedes $x \in X$ jeweils $\frac{|G|}{|G_x|} = (G : G_x) = |G(x)|$, also $|G_x| = \frac{|G|}{|G(x)|}$. Dies liefert

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} i(\sigma) \quad = \quad \frac{|Z|}{|G|} \quad = \quad \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x| \quad = \quad \sum_{x \in X} \frac{1}{|G(x)|}.$$

Bezeichnet nun $R \subseteq X$ ein Repräsentantensystem der Bahnen, dann gilt $|R| = |G \backslash X|$, und wir erhalten

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} i(\sigma) \quad = \quad \sum_{x \in X} \frac{1}{|G(x)|}. \quad = \quad \sum_{x \in R} \sum_{x \in G(x)} \frac{1}{|G(x)|} \quad =$$
$$\sum_{x \in R} |G(x)| \cdot \frac{1}{|G(x)|} \quad = \quad \sum_{x \in R} 1 \quad = \quad |R| \quad = \quad |G \backslash X|.$$