Aufgabe H13T1A4 (12 Punkte)

Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{Q}[x]/(x^{10} - 1)$.

(a) Bestimmen Sie ein kartesisches Produkt von Körpern, dass zu R isomorph ist.
Hinweis: Der Chinesische Restsatz kann hilfreich sein.

(b) Wie viele Ideale besitzt R?

Lösung:

zu (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\Phi_n \in \mathbb{Z}[x]$ das n-te Kreisteilungspolynom. Laut Vorlesung sind diese Polynome irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Laut Vorlesung besitzt $x^{10} - 1$ die Faktorisierung $x^{10} - 1 = \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \Phi_5 \cdot \Phi_{10}$, weil $1, 2, 5, 10$ genau die Teiler von 10 in $\mathbb{N}$ sind. Weil die Polynome Φ_d mit $d \in \{1, 2, 5, 10\}$ als voneinander verschiedene, irreduzible normierte Polynome über $\mathbb{Q}$ paarweise teilerfremd sind, sind auch die Hauptideale (Φ_d) mit $d \in \{1, 2, 5, 10\}$ paarweise teilerfremd. Außerdem gilt $(x^{10} - 1) = (\Phi_1)(\Phi_2)(\Phi_5)(\Phi_{10})$. Wir können somit den Chinesischen Restsatz anwenden und erhalten einen Ringisomorphismus

$$\mathbb{Q}[x]/(x^{10} - 1) \quad \cong \quad \mathbb{Q}[x]/(\Phi_1) \times \mathbb{Q}[x]/(\Phi_2) \times \mathbb{Q}[x]/(\Phi_5) \times \mathbb{Q}[x]/(\Phi_{10}).$$

Weil Φ_d für $d \in \{1, 2, 5, 10\}$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel und $\mathbb{Q}[x]$ als Polynomring über einem Körper ein Hauptidealring ist, handelt es sich bei dem Hauptideal (Φ_d) jeweils um ein maximales Ideal. Daraus wiederum folgt, dass $\mathbb{Q}[x]/(\Phi_d)$ jeweils ein Körper ist.

zu (b) Aus der Vorlesung ist bekannt: Sind R_1, R_2, R_3, R_4 Ringe, dann sind die Ideale von $R = R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4$ genau die Teilmengen der Form $I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$, wobei I_k für $k = 1, 2, 3, 4$ jeweils die Ideale von R_k durchläuft. Also hat jedes Ideal des Rings

$$\mathbb{Q}[x]/(\Phi_1) \times \mathbb{Q}[x]/(\Phi_2) \times \mathbb{Q}[x]/(\Phi_5) \times \mathbb{Q}[x]/(\Phi_{10})$$

jeweils die Form $I_1 \times I_2 \times I_5 \times I_{10}$, wobei I_d für jedes $d \in \{1, 2, 5, 10\}$ jeweils ein Ideal in $\mathbb{Q}[x]/(\Phi_d)$ bezeichnet. Da es sich bei $\mathbb{Q}[x]/(\Phi_d)$ um einen Körper handelt, besitzt dieser genau zwei verschiedene Ideale, nämlich das Null- und das Einheitsideal. Für jeden der Faktoren gibt es also genau zwei Möglichkeiten. Daraus folgt, dass das kartesische Produkt dieser Ringe genau $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ Ideale besitzt. Weil R zum kartesischen Produkt isomorph ist, besitzt auch R genau 16 Ideale.

Hinweis: Zur Erinnerung sei noch einmal darauf hingewiesen, dass eine entsprechende Aussage für Untergruppen von äußeren direkten Produkten $G \times H$ von Gruppen im Allgemeinen falsch ist. Man darf also nicht davon ausgehen, dass jede Untergruppe von $G \times H$ die Form $U \times V$ hat, wobei U eine Untergruppe von G und V eine Untergruppe von H bezeichnet.