Aufgabe H13T1A3 (6 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ eine Matrix über den komplexen Zahlen, hierbei gelte $\lambda \neq 0$. Man zeige, dass für alle $k \geq 1$ die Matrix A^k die Jordansche Normalform $\begin{pmatrix} \lambda^k & 1 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$ hat.

Lösung:

Wir überprüfen zunächst durch vollständige Induktion die Gleichung

$$A^k \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für $k = 1$ ist die Gleichung offenbar erfüllt. Sei nun $k \in \mathbb{N}$, und setzen wir die Gleichung für dieses k voraus. Dann folgt

$$A^{k+1} \quad = \quad A^k \cdot A \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom χ_{A^k} von A^k ist gegeben durch

$$\chi_{A^k} \quad = \quad \det(x \cdot I_2 - A) \quad = \quad \begin{pmatrix} x - \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & x - \lambda^k \end{pmatrix} \quad = \quad (x - \lambda^k)^2$$

wobei I_2 die 2×2-Einheitsmatrix bezeichnet. Die einzige Nullstelle von χ_{A^k} ist λ^k, somit ist dies der einzige Eigenwert von A^k. Für die Jordansche Normalform von A^k gibt es somit nur die beiden Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & 1 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad ,$$

je nachdem, ob diese aus einem oder aus zwei Jordankästchen besteht. Im ersten Fall wäre der Eigenraum von A^k zum Eigenwert λ^k ganz $\mathbb{C}^2$. Aber dies wäre nur möglich, wenn A^k mit $\lambda^k \cdot I_2$ übereinstimmen würde. Also bleibt nur der zweite Fall übrig, und

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & 1 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

ist tatsächlich die Jordansche Normalform von A^k.