Aufgabe H13T1A2 (14 Punkte)

Es sei G eine Gruppe der Ordnung $750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$. Mit Syl_5 bezeichnen wir die Menge der 5-Sylowgruppen von G, und mit n_5 bezeichnen wir die Mächtigkeit von Syl_5.

(a) Begründen Sie, dass $n_5 \in \{1, 6\}$ gilt.

(b) Begründen Sie, dass G im Fall $n_5 = 1$ nicht einfach ist.

(c) Begründen Sie, dass
$$\cdot : G \times \mathrm{Syl}_5 \to \mathrm{Syl}_5 \ , \ (g, P) \mapsto gPg^{-1}$$
eine transitive Operation von G auf Syl_5 ist.

(d) Begründen Sie, dass G im Fall $n_5 = 6$ nicht einfach ist.
Hinweis: Betrachten Sie den Kern des Homomorphismus $\lambda : G \to S_6$, der durch die Operation aus (c) gegeben ist.

Lösung:

zu (a) Auf Grund der Sylowsätze ist n_5 ein Teiler von $2 \cdot 3$, also $n_5 \in \{1, 2, 3, 6\}$. Außerdem gilt $n_5 \equiv 1 \bmod 5$. Wegen $2 \not\equiv 1 \bmod 5$ und $3 \not\equiv 1 \bmod 5$ sind $n_5 = 1$ oder $n_5 = 6$ die einzigen verbleibenden Möglichkeiten.

zu (b) Ist $n_5 = 1$, dann gibt es in G nur eine 5-Sylowgruppe P, und auf Grund der Sylowsätze ist diese ein Normalteiler. Es gilt $|P| = 5^3 = 125$, denn dies ist die höchste 5-Potenz, die die Gruppenordnung $|G| = 750$ teilt. Wegen $1 < |P| < |G|$ gilt $P \neq \{e\}$ und $P \neq G$. Also besitzt G einen nichttrivialen Normalteiler. Dies zeigt, dass G im Fall $n_5 = 1$ nicht einfach ist.

zu (c) Sei $P \in \mathrm{Syl}_5$ ein beliebiges Element. Nach Definition ist die Operation $\cdot$ genau dann transitiv, wenn $G(P) = \mathrm{Syl}_5$ gilt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass für jedes $Q \in \mathrm{Syl}_5$ ein $g \in G$ mit $g \cdot P = Q$ existiert. Sei also $Q \in \mathrm{Syl}_5$ vorgegeben. Auf Grund der Sylowsätze sind je zwei Sylowgruppen zueinander konjugiert. Es gibt also ein $g \in G$ mit $Q = gPg^{-1}$. Daraus folgt $Q = g \cdot P$ nach Definition der Gruppenoperation.

zu (d) Setzen wir $n_5 = 6$ voraus. Laut Vorlesung definiert die Operation $\cdot$ von G auf Syl_5 einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to \mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_5)$ mit $\phi(g)(P) = g \cdot P$ für alle $g \in G$ und $P \in \mathrm{Syl}_5$. Als Kern eines Homomorphismus ist $N = \ker(\phi)$ ein Normalteiler von G. Wenn wir $N \neq \{e\}$ und $N \neq G$ zeigen können, dann ist damit nachgewiesen, dass G keine einfache Gruppe ist.

Nehmen wir zunächst an, dass $N = G$ gilt. Dann würde nach Definition des Kerns $\phi(g) = \mathrm{id}$ für alle $g \in G$ folgen, denn id ist das Neutralelement von $\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_5)$. Daraus wiederum würde sich $g \cdot P = P$ für alle $g \in G$ und $P \in \mathrm{Syl}_5$ ergeben, d.h. jede 5-Sylowgruppe von G wäre ein Normalteiler. Aber laut Vorlesung ist dies nur möglich, wenn $n_5 = 1$ gilt, was zur Voraussetzung $n_5 = 6$ im Widerspruch steht.

Nehmen wir nun an, dass $N = \{e\}$ gilt. Dann wäre ϕ injektiv, und folglich wäre $\phi(G)$ eine zu G isomorphe Untergruppe von $\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_5)$. Dies würde bedeuten, dass $|G| = |\phi(G)| = 750$ ein Teiler von $|\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_5)|$ ist. Wegen $|\mathrm{Syl}_5| = n_5 = 6$ ist $\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_5)$ laut Vorlesung isomorph zu S_6 und somit $|\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_5)| = |S_6| = 6! = 720$. Aber 750 ist kein Teiler von 720. Der Widerspruch zeigt, dass auch die Annahme $N = \{e\}$ falsch war.