Aufgabe H13T1A1 (12 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

(a) Die symmetrische Gruppe S_3 und die additive Gruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sind isomorph.

(b) Die Primzerlegung von $10 \in \mathbb{Z}[i]$ lautet

$$10 \quad = \quad (1+i)(1-i)(2+i)(2-i)$$

(c) Es ist $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{11}, i)$ ein Zerfällungskörper des Polynoms $x^4 - 11 \in \mathbb{Q}[x]$.

(d) In $\mathbb{R}[x]$ ist (x) ein Primideal.

Lösung:

zu (a) Die Aussage ist falsch. Wären die beiden Gruppen isomorph zueinander, dass wären S_3 und $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ entweder beide abelsch oder beide nicht abelsch. Aus der Vorlesung ist aber bekannt, dass $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ eine zyklische und somit auch abelsche Gruppe ist, wärend die symmetrischen Gruppen S_n für $n \geq 3$ nicht abelsch sind.

zu (b) Die Aussage ist richtig. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass alle Elemente $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, deren Norm $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$ eine Primzahl ist, irreduzibel sind. Wegen $N(1+i) = N(1-i) = 2$ und $N(2+i) = N(2-i) = 5$ sind die Elemente $1 \pm i$ und $2 \pm i$ also irreduzibel. Weil $\mathbb{Z}[i]$ laut Vorlesung ein euklidischer und damit auch ein faktorieller Ring ist, stimmen die irreduziblen Elemente in $\mathbb{Z}[i]$ außerdem mit den Primelementen dieses Rings überein. Also ist die angegebene Faktorisierung von 10 tatsächlich eine Primzerlegung in $\mathbb{Z}[i]$.

zu (c) Die Aussage ist richtig. Laut Vorlesung ist der Zerfällungskörper von $f = x^4 - 11$ in $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$ der Körper, den man durch Adjunktion der komplexen Nullstellen von f an $\mathbb{Q}$ erhält. Die Menge der komplexen Nullstellen von f ist gegeben durch $N = \{\pm\sqrt[4]{11}, \pm i\sqrt[4]{11}\}$. Es muss nun $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{11}, i) = \mathbb{Q}(N)$ überprüft werden. Die Inklusion "$\supseteq$" ist erfüllt, da mit $\sqrt[4]{11}$ und i auch alle Elemente aus N in $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{11}, i)$ liegen. Ebenso gilt "$\subseteq$", denn mit $\sqrt[4]{11}, i\sqrt[4]{11} \in N$ liegt auch das Element $i = \frac{i\sqrt[4]{11}}{\sqrt[4]{11}}$ in $\mathbb{Q}(N)$.

zu (d) Die Aussage ist richtig. Laut Vorlesung gilt: Ist R ein Ring und $a \in R$ ein Primelement, dann ist das Hauptideal (a) in R ein Primideal. Das Element x ist wegen $\mathrm{grad}(x) = 1$ in $\mathbb{R}[x]$ irreduzibel. Als Polynomring über einem Körper ist $\mathbb{R}[x]$ ein euklischer Ring und somit x als irreduzibles Element ein Primelement, siehe Teil (b). Also ist (x) ein Primideal.