Aufgabe H12T3A5 (5 Punkte)

Zerlegen Sie das Polynom $x^5 - 7x^3 + 503x^2 + 12x - 2012$ in $\mathbb{Q}[x]$ in irreduzible Faktoren!

Lösung:

Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ das angegebene Polynom. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede rationale Nullstelle von f in $\mathbb{Z}$ liegt und ein Teiler des konstanten Terms $-2012 = -4 \cdot 503$ ist. Durch probeweises Einsetzen finden wir die Nullstellen ± 2 von f. Daraus folgt, das $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$ ein Teiler von f ist. Durch Polynomdivision erhalten wir

$$(x^5 - 7x^3 + 503x^2 + 12x - 2012) : (x^2 - 4) \quad = \quad x^3 - 3x + 503.$$

Auch für das Polynom $g = x^3 - 3x + 503 \in \mathbb{Z}[x]$ gilt wieder, dass jede rationale Nullstelle von g in $\mathbb{Z}$ liegt und ein Teiler des konstanten Terms 503 sein muss. Aus Aufgabe H12T3A4 ist bekannt, dass 503 eine Primzahl ist. Die einzigen Teiler von 503 in $\mathbb{Z}$ sind also $\pm 1, \pm 503$. Es gilt $g(1) = 1 - 3 + 503 = 501 \neq 0$, $g(-1) = (-1) + 3 + 503 = 505 \neq 0$, außerdem

$$g(503) \quad = \quad (503)^3 - 3 \cdot 503 + 503 \quad \geq \quad (\tfrac{1}{2} \cdot 10^3)^3 - 2 \cdot 503 \quad = \quad \tfrac{1}{8} \cdot 10^9 - 2 \cdot 503 \quad > \quad 0$$

und ebenso

$$g(-503) \quad = \quad (-503)^3 - 3 \cdot (-503) + 503 \quad \leq \quad -(\tfrac{1}{2} \cdot 10^3)^3 + 4 \cdot 503 \quad = \quad -\tfrac{1}{8} \cdot 10^9 + 4 \cdot 503 \quad < \quad 0.$$

Also hat g keine rationale Nullstelle. Wegen $\mathrm{grad}(g) = 3$ folgt daraus, dass g in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist. Somit ist durch

$$f \quad = \quad (x-2)(x+2)(x^3 - 3x + 503)$$

bereits eine Zerlegung von f in irreduzible Faktoren gegeben.