Aufgabe H12T3A2 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Zentralisator des n-Zykels $(1\ 2\ ...\ n)$ in der symmetrischen Gruppe S_n die zyklische Gruppe $\langle(1\ 2\ ...\ n)\rangle$ ist.

Lösung:

Sei $\sigma = (1\ 2\ ...\ n)$. Nach Definition ist der Zentralisator von σ durch $C_{S_n}(\sigma) = \{\tau \in S_n \mid \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau\}$ gegeben. Die zyklische Gruppe $\langle\sigma\rangle$ ist in $C_{S_n}(\sigma)$ enthalten, denn jedes $\tau \in \langle\sigma\rangle$ hat die Form $\tau = \sigma^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und damit folgt

$$\tau \circ \sigma \quad = \quad \sigma^k \circ \sigma \quad = \quad \sigma^{k+1} \quad = \quad \sigma \circ \sigma^k \quad = \quad \sigma \circ \tau \quad ,$$

also $\tau \in C_{S_n}(\sigma)$. Um zu zeigen, dass nicht nur $\langle\sigma\rangle \subseteq C_{S_n}(\sigma)$, sondern sogar $\langle\sigma\rangle = C_{S_n}(\sigma)$ gilt, betrachten wir die Operation der Gruppe S_n auf sich selbst durch Konjugation, die wir mit $\cdot : S_n \times S_n \to S_n$ bezeichnen (während wir σ als Symbol für die Gruppenverknüpfung verwenden). Bezüglich dieser Operation ist $C_{S_n}(\sigma)$ genau der Stabilisator $(S_n)_\sigma$ des Elements σ.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass zwischen der Länge der Bahn $S_n(\sigma)$ von σ unter dieser Gruppenoperation und der Stabilisatorordnung der Zusammenhang $|S_n(\sigma)| = (S_n : (S_n)_\sigma)$ besteht. Außerdem ist bekannt, dass $S_n(\sigma)$ genau die Konjugationsklasse von σ ist, und dass diese Konjugationsklasse aus den Elementen desselben Zerlegungstyps wie σ besteht. Die Menge $S_n(\sigma)$ ist also genau die Menge der n-Zykel in S_n. Da die Anzahl der n-Zykel in S_n durch $(n-1)!$ gegeben ist, erhalten wir $|S_n(\sigma)| = (n-1)!$ und mit dem Satz von Lagrange

$$|C_{S_n}(\sigma)| \quad = \quad |(S_n)_\sigma| \quad = \quad \frac{|S_n|}{(S_n : (S_n)_\sigma)} \quad = \quad \frac{|S_n|}{|S_n(\sigma)|} \quad = \quad \frac{n!}{(n-1)!} \quad = \quad n.$$

Aus $\langle\sigma\rangle \subseteq C_{S_n}(\sigma)$ und $|\langle\sigma\rangle| = \mathrm{ord}(\sigma) = n = |C_{S_n}(\sigma)|$ folgt $\langle\sigma\rangle = C_{S_n}(\sigma)$.