

Aufgabe H12T3A1 (5 Punkte)

Geben Sie drei nicht-isomorphe Gruppen der Ordnung 2012 konkret an und beweisen Sie, dass diese nicht isomorph sind!

Lösung:

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Diedergruppe D_{1006} mit 2012 Elementen nicht abelsch ist. Zwei weitere Gruppen der Ordnung 2012 sind gegeben durch

$$G_1 = \mathbb{Z}/2012\mathbb{Z} \quad \text{und} \quad G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/1006\mathbb{Z}.$$

Weil G_1, G_2 abelsch und D_{1006} nicht abelsch ist, ist D_{1006} weder zu G_1 noch zu G_2 isomorph. Auch G_1 und G_2 sind nicht isomorph zueinander. Denn die Gruppe G_1 ist zyklisch; wäre auch G_2 zyklisch, dann müsste es in G_2 ein Element der Ordnung 2012 geben. Aber die Gleichungen

$$1006 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) = (\overline{1006a}, \overline{1006b}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

für alle $(\bar{a}, \bar{b}) \in G_2$ mit $\bar{a} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\bar{b} \in \mathbb{Z}/1006\mathbb{Z}$ zeigen, dass die Ordnungen sämtlicher Elemente in G_2 Teiler von 1006 und somit insbesondere kleiner als 2012 sind.