Aufgabe H12T2A5 (6 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Für jede nicht verschwindende ganze Zahl a sei $\nu_p(a)$ der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von a (also insbesondere genau dann 0, falls p kein Teiler von a ist). Ist b eine weitere nicht verschwindende ganze Zahl, so defnieren wir $\nu_p(\frac{a}{b}) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$.

(a) Sei $\frac{a}{b}$ ein vollständig gekürzter Bruch mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass sich der Winkel $\frac{2\pi}{b}$ aus dem Winkel $\frac{2\pi a}{b}$ nur mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt.

(b) Sei $r \in \mathbb{Q}^\times$ eine nicht verschwindende rationale Zahl. Zeigen Sie, dass sich der Winkel $2\pi r$ genau dann mit Zirkel und Lineal dritteln lässt, wenn $\nu_3(r) \geq 0$ gilt.

Lösung:

zu (a) Aus der Vorlesung ist über die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal folgendes bekannt: Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann aus einer Punktmenge S mit $\{0,1\} \subseteq S \subseteq \mathbb{C}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn es eine Kette von Teilkörpern $\mathbb{Q}(S) = K_0 \subseteq K_1 \subseteq ... \subseteq K_r$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ und $[K_s : K_{s-1}] = 2$ für $1 \leq s \leq r$ und $z \in K_r$ gibt. Ein Winkel $\beta \in \mathbb{R}$ ist genau dann aus einem Winkel α konstruierbar, wenn der Punkt $z = e^{i\beta}$ aus der Punktmenge $S = \{0, 1, e^{i\alpha}\}$ mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

Sei nun $r = \frac{a}{b}$ ein vollständig gekürzter Bruch wie vorgegeben, mit $a \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$, eine primitive m-te Einheitswurzel. Wenn wir zeigen können, dass $\mathbb{Q}(e^{ir}) = \mathbb{Q}(\zeta_b)$ gilt, dann folgt daraus, dass der Winkel $\frac{2\pi}{b}$ aus dem Winkel r durch Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Setzen wir nämlich $K_0 = \mathbb{Q}(\zeta_b)$ und $S = \{0, 1, e^{ir}\}$, dann ist $\mathbb{Q}(S) = \mathbb{Q}(e^{ir}) = K_0$, und $e^{i(2\pi/b)}$ ist in K_0 enthalten. Wir haben dann also eine Körperkette der Länge null mit der geforderten Eigenschaft konstruiert.

Die Inklusion $\mathbb{Q}(\zeta_b) \subseteq \mathbb{Q}(e^{ir})$ ist wegen $e^{ir} = e^{i\frac{2\pi a}{b}} = (e^{2\pi i/b})^a = \zeta_b^a \in \mathbb{Q}(\zeta_b)$ offensichtlich. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion verwenden wir, dass nach dem Lemma von Bézout ganze Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $ka + \ell b = \mathrm{ggT}(a,b) = 1$ existieren. Aus der Gleichung

$$(e^{ir})^k \quad = \quad (e^{2\pi i a/b})^k \quad = \quad e^{2\pi i k a/b} \quad = \quad e^{2\pi i(1-\ell b)/b} \quad = \quad e^{2\pi i/b} e^{-2\pi i \ell} \quad = \quad e^{2\pi i/b} \cdot 1 \quad = \quad \zeta_b$$

folgt dann $\zeta_b \in \mathbb{Q}(e^{ir})$ und $\mathbb{Q}(\zeta_b) \subseteq \mathbb{Q}(e^{ir})$ wie gewünscht.

zu (b) Wir schreiben die rationale Zahl r in der Form $r = 3^\nu \frac{a}{b}$ mit $\nu = \nu_3(r)$, $a, b \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{ggT}(b, 3a) = 1$. Dann gilt $\frac{1}{3}r = 3^{\nu-1}\frac{a}{b}$. Betrachten wir nun zunächst den Fall $\nu > 0$. Mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil (a) erhalten wir

$$\mathbb{Q}(e^{ir}) = \mathbb{Q}(e^{2\pi i 3^\nu a/b}) = \mathbb{Q}(\zeta_b) \qquad \text{und ebenso} \qquad \mathbb{Q}(e^{ir/3}) = \mathbb{Q}(e^{2\pi i 3^{\nu-1} a/b}) = \mathbb{Q}(\zeta_b).$$

Setzen wir $K_0 = \mathbb{Q}(e^{ir}) = \mathbb{Q}(e^{ir/3})$, dann folgt $\mathbb{Q}(\{0, 1, e^{ir}\}) = K_0$ und $e^{ir/3} \in K_0$. Also ist der Winkel $\frac{1}{3}r$ aus dem Winkel r mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Betrachten wir nun den Fall $\nu = 0$. In diesem Fall gilt nach Teil (a)

$$\mathbb{Q}(e^{ir}) = \mathbb{Q}(e^{2\pi i a/b}) = \mathbb{Q}(\zeta_b) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Q}(e^{ir/3}) = \mathbb{Q}(e^{2\pi i 3^{-1}a/b}) = \mathbb{Q}(\zeta_{3b}).$$

In diesem Fall setzen wir $K_0 = \mathbb{Q}(\zeta_b)$ und $K_1 = \mathbb{Q}(\zeta_{3b})$. Es gilt dann $\mathbb{Q}(\{0,1,e^{ir}\}) = K_0 \subseteq K_1$. Wegen $\mathrm{ggT}(3,b) = 1$ gilt außerdem $[K_0 : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta_b) : \mathbb{Q}] = \varphi(b)$ und $[K_1 : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta_{3b}) : \mathbb{Q}] = \varphi(3b) = \varphi(3)\varphi(b) = 2\varphi(b)$. Mit der Gradformel $[K_1 : \mathbb{Q}] = [K_1 : K_0] \cdot [K_0 : \mathbb{Q}]$ erhalten wir außerdem

$$[K_1 : K_0] \quad = \quad \frac{[K_1 : \mathbb{Q}]}{[K_0 : \mathbb{Q}]} \quad = \quad \frac{2\varphi(b)}{\varphi(b)} \quad = \quad 2.$$

Die oben formulierte Bedingung ist also mit einer Körperkette der Länge 1 erfüllt. Also ist auch in diesem Fall der Winkel $\frac{1}{3}r$ aus dem Winkel r mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Zum Schluss betrachten wir den Fall $\nu < 0$. Nehmen wir an, der Winkel $\frac{1}{3}r$ ist auch unter dieser Voraussetzung aus dem Winkel r mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Dann gibt es eine Körperkette

$$\mathbb{Q}(\{0,1,e^{ir}\}) = K_0 \subseteq K_1 \subseteq ... \subseteq K_s$$

mit $s \in \mathbb{N}_0$, $[K_\ell : K_{\ell-1}] = 2$ für $1 \le \ell \le s$ und $e^{ir/3} \in K_s$. Auf Grund der Gradformel gilt $[K_s : K_0] = \prod_{\ell=1}^{s} [K_\ell : K_{\ell-1}] = \prod_{\ell=1}^{s} 2 = 2^s$. Setzen wir $\mu = -\nu \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir mit Teil (a) diesmal

$$\mathbb{Q}(e^{ir}) = \mathbb{Q}(e^{2\pi i a/(3^\mu b)}) = \mathbb{Q}(\zeta_{3^\mu b}) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Q}(e^{ir/3}) = \mathbb{Q}(e^{2\pi i a/(3^{\mu+1} b)}) = \mathbb{Q}(\zeta_{3^{\mu+1} b}).$$

Die Gradformel liefert

$$\begin{aligned} [\mathbb{Q}(e^{ir/3}) : K_0] \quad &= \quad [\mathbb{Q}(e^{ir/3}) : \mathbb{Q}(e^{ir})] \quad = \quad \frac{[\mathbb{Q}(e^{ir/3}) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(e^{ir}) : \mathbb{Q}]} \quad = \quad \frac{[\mathbb{Q}(\zeta_{3^{\mu+1}b}) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\zeta_{3^\mu b}) : \mathbb{Q}]} \\ &= \quad \frac{\varphi(3^{\mu+1}b)}{\varphi(3^\mu b)} \quad = \quad \frac{\varphi(3^{\mu+1})\varphi(b)}{\varphi(3^\mu)\varphi(b)} \quad = \quad \frac{2 \cdot 3^\mu \cdot \varphi(b)}{2 \cdot 3^{\mu-1} \cdot \varphi(b)} \quad = \quad 3. \end{aligned}$$

Wegen $e^{ir/3} \in K_s$ und $K_0 = \mathbb{Q}(e^{ir}) \subseteq \mathbb{Q}(e^{ir/3})$ ist $\mathbb{Q}(e^{ir/3})$ ein Zwischenkörper von $K_s | K_0$. Auf Grund der Gradformel gilt deshalb

$$2^s \quad = \quad [K_s : K_0] \quad = \quad [K_s : \mathbb{Q}(e^{ir/3})] \cdot [\mathbb{Q}(e^{ir/3} : K_0] \quad = \quad [K_s : \mathbb{Q}] \cdot 3.$$

Aber dies steht im Widerspruch dazu, dass 3 kein Teiler von 2^s ist. Die Annahme, dass der Winkel r mit Zirkel und Lineal gedrittelt werden kann, hat also zu einem Widerspruch geführt.