Aufgabe H12T2A4 (6 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Sei K ein Körper der Charakteristik 0.

(a) Sei E eine (endliche) galoissche Körpererweiterung von K. Zeigen Sie, dass $E|K$ einen Zwischenkörper F besitzt, so dass der Grad $[E : F]$ eine p-Potenz ist und der Grad $[F : K]$ nicht von p geteilt wird. (Die Zahl 1 ist eine p-Potenz für jede Primzahl p.)

(b) Besitze K die Eigenschaft, dass der Grad $[L : K]$ jeder nicht trivialen endlichen Körpererweiterung $L|K$ von p geteilt wird. Zeigen Sie, dass dann der Grad einer jeder endlichen Körpererweiterung über K eine p-Potenz ist.

Lösung:

zu (a) Sei $G = \mathrm{Gal}(E|K)$ die endliche Galoisgruppe von $E|K$, P eine p-Sylowgruppe von G und $F = E^P$ der zugehörige Fixkörper. Auf Grund der Ergänzungen zum Hauptsatz der Galoistheorie gilt $[E : F] = |P|$ und $[F : K] = (G : P)$. Weil P eine p-Sylowgruppe von G ist, ist die Gruppenordnung p eine p-Potenz, und der Index $(G : P)$ ist teilerfremd zu p, wird also von p nicht geteilt.

zu (b) Sei $M|K$ eine endliche Körpererweiterung. Im Fall $[M : K] = 1 = p^0$ ist der Erweiterungsgrad von $M|K$ auf jeden Fall eine p-Potenz, und es gibt nichts zu zeigen. Nehmen wir nun an, dass $[M : K] > 1$ gilt, aber $[M : K]$ keine p-Potenz ist. Dann gibt es einen Primteiler q von $[M : K]$ mit $q \neq p$. Um das Ergebnis aus Teil (a) anwenden zu können, gehen wir von M zu einer Galois-Erweiterung von K über. Als endliche Erweiterung ist $M|K$ algebraisch, und wegen $\mathrm{char}(K)$ ist $M|K$ auch separabel. Weil $M|K$ endlich und separabel ist, können wir den Satz vom primitiven Element anwenden und erhalten ein $\alpha \in M$ mit $M = K(\alpha)$. Es sei L der Zerfällungskörper von f über K. Wegen $f(\alpha) = 0$ gilt $\alpha \in L$ und somit $M = K(\alpha) \subseteq L$. Als Zerfällungskörper ist L algebraisch über K, und wegen $\mathrm{char}(K) = 0$ ist auch die Erweiterung $L|K$ separabel. Außerdem ist L als Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[x]$ normal über K. Insgesamt ist $L|K$ also eine Galois-Erweiterung.

Auf Grund der Gradformel gilt $[L : K] = [L : M] \cdot [M : K]$. Wegen $q \mid [M : K]$ gilt auch $q \mid [L : K]$. Wegen $q \neq p$ zeigt dies, dass $[L : K]$ keine p-Potenz ist. Wir wenden nun Teil (a) auf die Galois-Erweiterung $L|K$ an. Demzufolge gibt es einen Zwischenkörper M_0 von $L|K$ mit der Eigenschaft, dass $[L : M_0]$ eine p-Potenz und $[M_0 : K]$ teilerfremd zu p ist. Weil $[L : K] = [L : M_0] \cdot [M_0 : K]$ gilt und $[L : K]$ keine p-Potenz ist, muss $[M_0 : K] > 1$ gelten. Also ist $M_0|K$ eine nicht-triviale, endliche Körpererweiterung mit der Eigenschaft $p \nmid [M_0 : K]$. Aber dies widerspricht unserer Voraussetzung. Die Annahme, dass $[M : K]$ keine p-Potenz ist, war also falsch.