Aufgabe H12T2A2 (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass das Polynom $f = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ keine mehrfachen Nullstellen in den komplexen Zahlen besitzt.

Lösung:

Eine komplexe Zahl α ist genau dann mehrfache Nullstelle von f, wenn $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ gilt. Nehmen wir an, die ist der Fall. Die Ableitung von f ist gegeben durch

$$f' \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Aus $f - f' = \frac{1}{n!} x^n$ folgt $0 = f(\alpha) - f'(\alpha) = \frac{1}{n!} \alpha^n$ und somit $\alpha = 0$. Aber andererseits ist α wegen $f(\alpha) = \frac{1}{0!} x^0 = 1$ keine Nullstelle von f. Die Annahme, dass f in $\mathbb{C}$ mehrfache Nullstellen besitzt, hat also zu einem Widerspruch geführt.