Aufgabe H12T2A1 (6 Punkte)

Seien $n, m > 0$ natürliche Zahlen. Mit $M_{n,m}(\mathbb{Q})$ bezeichnen wir die Menge der $(n \times m)$-Matrizen mit rationalen Einträgen. Seien $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ und $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ die allgemeinen linearen Gruppen in den Dimensionen n und m über $\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ vermöge

$$\cdot : (\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})) \times M_{n,m}(\mathbb{Q}) \to M_{n,m}(\mathbb{Q}) \quad , \quad ((S,T),A) \mapsto SAT^{-1}$$

auf $M_{n,m}(\mathbb{Q})$ operiert, aber nicht effektiv. (Dabei heißt eine Gruppenoperation $G \times X \to X$ einer Gruppe G auf einer Menge X *effektiv*, wenn aus $\forall x \in X : g \cdot x = x$ für ein Gruppenelement $g \in G$ schon $g = 1$ folgt.)

(b) Zeigen Sie, dass diese Operation genau $r+1$ Bahnen besitzt, dabei ist $r = \min(m,n)$.
(Tipp: Verwenden Sie den Rang einer Matrix.)

Lösung:

zu (a) Sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$, und seien $(S_1,T_1),(S_2,T_2) \in G$ vorgegeben. Sei außerdem $A \in M_{m,n}(\mathbb{Q})$. Durch $1 = (E_n, E_m)$ ist das Neutralelement von G geben, wobei E_n und E_m die $n \times n$- bzw. $m \times m$-Einheitsmatrix bezeichnet. Zu überprüfen ist

$$1 \cdot A = A \qquad \text{und} \qquad (S_1,T_1) \cdot ((S_2,T_2) \cdot A) = ((S_1,T_1)(S_2,T_2)) \cdot A.$$

Die erste Gleichung erhält man durch $1 \cdot A = (E_n, E_m) \cdot A = E_n A E_m^{-1} = A$, und die zweite ergibt sich aus der Rechnung

$$\begin{aligned} (S_1,T_1) \cdot ((S_2,T_2) \cdot A) \quad &= \quad (S_1,T_1) \cdot (S_2 A T_2^{-1}) \quad = \quad S_1(S_2 A T_2^{-1})T_1^{-1} \quad = \\ (S_1 S_2) A (T_1 T_2)^{-1} \quad &= \quad (S_1 S_2, T_1 T_2) \cdot A \quad = \quad ((S_1,T_1)(S_2,T_2)) \cdot A. \end{aligned}$$

Also ist durch $\cdot$ tatsächlich eine Gruppenoperation von G auf $M_{n,m}(\mathbb{Q})$ definiert. Diese Operation ist aber nicht effektiv. Setzen wir nämlich $g = (2E_n, 2E_m) \in G$, dann ist einerseits $g \neq 1$, andererseits für eine beliebige Matrix $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$ aber

$$g \cdot A \quad = \quad (2E_n, 2E_m) \cdot A \quad = \quad (2E_n) A (2E_m)^{-1} \quad = \quad 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot E_n A E_m^{-1} = A.$$

zu (b) Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass für den Rang jeder Matrix $A \in M_{n,m}(\mathbb{Q})$ sowohl $\mathrm{rg}(A) \leq n$ als auch $\mathrm{rg}(A) \leq m$, insgesamt also $0 \leq \mathrm{rg}(A) \leq r$ gilt. Andererseits existiert für jede Zahl $s \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq s \leq r$ auch eine Matrix $A_s \in M_{n,m}(\mathbb{Q})$ vom Rang s, zum Beispiel die Matrix, deren erste s Spalten die Einheitsvektoren $e_1, ..., e_s \in \mathbb{Q}^n$ und deren restliche Spalten jeweils durch den Nullvektor $0_{\mathbb{Q}^n}$ gegeben sind.

Außerdem wissen wir aus der Linearen Algebra, dass zwei Matrizen $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{Q})$ genau dann denselben Rang haben, wenn sie äquivalent sind, wenn also Elemente $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ und $U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ mit $TAU = B$ existieren. Wegen $(T,U) \in G$ und $(T, U^{-1}) \cdot A = TAU$ ist die Existenz des Paares (T,U) äquivalent dazu, dass A und B in derselben Bahn der Gruppenoperation liegen. Insgesamt ist also die Anzahl der Bahnen der Operation gleich der Anzahl der natürlichen Zahlen s mit $0 \leq s \leq r$, also gleich $r+1$. Die Bahnen sind gegeben durch $G(A_s)$, $0 \leq s \leq r$, mit den oben definierten Matrizen $A_s \in M_{n,m}(\mathbb{Q})$.