Aufgabe H12T1A2 (3 Punkte)

Gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$, so dass die Kongruenz

$$x^{101} - (x+1)^{101} + x^2 - 47 \equiv 0 \bmod 101 \qquad \text{erfüllt ist?}$$

Lösung:

Nehmen wir an, dass $x \in \mathbb{Z}$ eine Lösung der Kongruenz ist. Nach dem Kleinen Satz von Fermat gilt $a^p \equiv a \bmod p$ für jede Primzahl p und jedes $a \in Z$. Daraus folgt $x^1 01 \equiv x \bmod 101$ und $x^{101} \equiv x \bmod 101$. Es gilt also die Äquivalenz

$$x^{101} - (x+1)^{101} + x^2 - 47 \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - (x+1) + x^2 - 47 \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 48 \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \equiv 48.$$

Die Erfüllbarkeit der Kongruenz $x^2 \equiv 48 \bmod 101$ ist gleichbedeutend damit, dass 48 ein quadratischer Rest modulo 101 ist. Wegen $101 \nmid 48$ ist dies gleichbedeutend damit, dass das Legrendre-Symbol

$$\left(\frac{48}{101}\right) = 1 \qquad \text{ist.}$$

Ob dies wirklich der Fall ist, überprüfen wir mit Hilfe des Quadratischen Reziprozitätsgesetzes und der anderen Rechenregeln für das Legendre-Symbol. Es gilt

$$\left(\frac{48}{101}\right) = \left(\frac{3 \cdot 16}{101}\right) = \left(\frac{3}{101}\right)\left(\frac{16}{101}\right) = \left(\frac{3}{101}\right)\left(\frac{2}{101}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{3}{101}\right) = \left(\frac{101}{3}\right) = \left(\frac{33 \cdot 3 + 2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = (-1)^{\frac{3^2-1}{8}} = (-1)^1 = -1.$$

Dies zeigt, dass die Kongruenz $x^2 \equiv 48 \bmod 101$ *keine* Lösung in $\mathbb{Z}$ besitzt, und folglich ist auch die in der Aufgabenstellung angegebene Kongruenz nicht lösbar.