Aufgabe F20T3A5

Wir betrachten das Polynom $f_1 := x^5 + 10x + 5$ in $\mathbb{Q}[x]$ und definieren induktiv Polynome $f_n(x) := f_1(f_{n-1}(x))$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Polynome f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ irreduzibel sind. Zeigen Sie dazu folgende Zwischenschritte durch Induktion nach n:

(a) f_n liegt in $\mathbb{Z}[x]$, und die Klasse von f_n in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$ ist durch x^{5^n} gegeben.

(b) Zeigen Sie, dass die Klasse von $f_n(0)$ in $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ nicht verschwindet.

Hinweis/Kommentar:

Die rekursive Definition der Polynome f_n wirkt natürlich zunächst ein wenig abschreckend. Wenn man aber die ersten Polynome $f_1, f_2, f_3, ...$ im Restklassenring $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ einmal ausgerechnet hat, merkt man schnell, dass modulo 5 in jedem Schritt die meisten Terme wegfallen. (Denken Sie daran, den „Freshman's Dream“ anzuwenden.) Daraus lässt sich leicht ein Induktionsargument gewinnen. In Teil (b) genügt es, jeweils den konstanten Term von f_n zu betrachten. Mit welchem bekannten Irreduzibilitätskriterium lässt sich nun die Aufgabe abschließen?