Aufgabe F20T3A4

Seien K ein Körper und $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung.

(a) Wir betrachten Zwischenkörper M und M' von $L|K$ und ein Element σ in $\mathrm{Gal}(L|K)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

   (i) $\sigma(M) = M'$

   (ii) $\sigma \mathrm{Gal}(L|M)\sigma^{-1} = \mathrm{Gal}(L|M')$

(b) Seien L der Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms f in $K[x]$ und α und β Nullstellen von f in L. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(L|K(\alpha))$ und $\mathrm{Gal}(L|K(\beta))$ zueinander isomorph sind.

(c) Zeigen Sie, dass man in (b) die Voraussetzung, dass f irreduzibel ist, nicht weglassen kann.

Hinweis/Kommentar:

Der Äquivalenzbeweis in Teil (a) ist aus der Vorlesung bekannt. Es kann unmittelbar nachgerechnet werden, dass $\sigma(M)$ der Fixkörper der Untergruppe $\sigma \mathrm{Gal}(L|M)\sigma^{-1}$ von $\mathrm{Gal}(L|K)$ ist; die Äquivalenzaussage erhält man dann mit dem Hauptsatz der Galoistheorie. Teil (b) folgt durch Anwendung von Teil (a) auf die Zwischenkörper $M = K(\alpha)$ und $M' = K(\beta)$. Für Teil (c) genügt es, als Gegenbeispiel ein reduzibles Polynom mit zwei irreduziblen Faktoren verschiedener Grade (zum Beispiel Grad 1 und 2) zu betrachten.