

### Aufgabe F20T3A3

Sei  $p$  eine Primzahl,  $\mathbb{F}_p$  der Körper mit  $p$  Elementen und  $V = \mathbb{F}_p^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter sei  $G \leq \text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$  eine Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von  $p$  ist. Man zeige, dass es einen Vektor  $0 \neq v \in \mathbb{F}_p^n$  gibt mit  $gv = v$  für alle  $g \in G$ .

(Hinweis:  $|V \setminus \{0\}|$  ist nicht durch  $p$  teilbar.)

*Hinweis / Kommentar:*

Dies ist eine typische Anwendung der Bahngleichung, die in ähnlicher Form schon früher als Aufgabe gestellt wurde. Die Lösung ähnelt auch dem Beweis des Satzes aus der Vorlesung, dass  $p$ -Gruppen auflösbar sind.