Aufgabe F20T3A3

Sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen und $V = \mathbb{F}_p^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $G \le \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ eine Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von p ist. Man zeige, dass es einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{F}_p^n$ gibt mit $gv = v$ für alle $g \in G$.
(Hinweis: $|V \setminus \{0\}|$ ist nicht durch p teilbar.)

Lösung:

Bekanntlich ist durch $\cdot : \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \times V \to V$, $(A, v) \mapsto Av$ eine Gruppenoperation von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ auf V definiert, und durch Einschränkung der Abbildung auf $G \times V$ erhalten wir eine Operation von G auf V. Es sei $F \subseteq V$ die Fixpunktmenge dieser Operation und $R \subseteq V$ ein Repräsentantensystem der Bahnen mit mehr als einem Element. Laut Bahngleichung gilt

$$p^n \quad = \quad |V| \quad = \quad |F| + \sum_{v \in R} (G : G_v)$$

mit $(G : G_v) > 1$ für alle $v \in R$. Nach Voraussetzung gibt es außerdem $|G| = p^e$ für ein $e \in \mathbb{N}$. Betrachten wir nun zunächst den Fall $e = 0$. Dann ist $G = \{E\}$ mit der Einheitsmatrix E, und für einen beliebig gewählten Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ gilt $Ev = v$, also $gv = v$ für alle $g \in G$.

Ist dagegen $e > 0$, dann ist nicht nur $|G|$, sondern auch $(G : G_v)$ für jedes $v \in R$ eine p-Potenz größer als 1. Daraus folgt, dass $\sum_{v \in R}$ durch p teilbar ist. Weil auch p^n ein Vielfaches von p ist, ergibt sich aus der Bahngleichung, dass dasselbe auch für $|F|$. Außerdem ist $|F|$ positv, denn wegen $A \cdot 0 = 0$ für alle $A \in G$ ist der Nullvektor auf jeden Fall in G enthalten. Ingesamt gilt damit $|F| \ge p > 1$, insbesondere gibt es ein $v \in F \setminus \{0\}$. Wegen $v \in F$ ist $Av = v$ für alle $A \in G$ erfüllt.