Aufgabe F20T3A2

Berechnen Sie die letzten beiden Ziffern der Zahl

$$2018^{(2019^{2020})}.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie die Klasse von $2018^{(2019^{2020})}$ in $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass $[2018^{(2019^{2020})}] = 0$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gilt.

(c) Schließen Sie die Berechnung mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes ab.

Hinweis/Kommentar:

Dass man in Restklassenringen Potenzen mit riesigen Exponenten berechnen kann, ist aus der Zahlentheorie-Vorlesung (bzw. den Übungen) bekannt. In Teil (a) verwenden Sie den Isomorphismus $(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$, um sich zunächst klar zu machen, dass von der Zahl 2019^2020 nur die Restklasse modulo 20 relevant ist. Mit dieser Restklasse lässt sich das angegebene Element dann leicht berechnen. Für Teil (b) genügt es sich zu überlegen, für welche $k \in \mathbb{N}$ die Potenz $[2]^k$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gleich null ist. Der Chinesische Restsatz wird in Teil (c) natürlich gebraucht, um aus den Ergebnissen von (a) und (b) die Restklasse modulo 100 zu bestimmen.

Eine solche Aufgabenstellung lässt sich natürlich leicht variieren. Wer eine zusätzliche Herausforderung sucht, kann sich überlegen, ob mit diesen Methoden auch die letzten drei Ziffern von

$$2018^{\left(2019^{\left(2020^{2021}\right)}\right)} \qquad \text{berechnet werden können.}$$