Aufgabe F20T3A1

Seien G und G' Gruppen und $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Definieren Sie den Begriff *Normalteiler*.

(b) Sei K der Kern von f, und sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(f(H)) = HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\} \qquad \text{ist.}$$

(c) Sei G eine Gruppe, und seien H und K Normalteiler in G mit der Eigenschaft $H \cap K = \{e_G\}$. Zeigen Sie, dass $kh = hk$ gilt für alle $h \in H$ und $k \in K$.

(d) Geben Sie ein Beispiel (U, G) mit einer Gruppe G und einer Untergruppe U von G, die kein Normalteiler ist.

Lösung:

zu (a) Ein *Normalteiler* einer Gruppe G ist eine Untergruppe N mit der Eigenschaft, dass $gN = Ng$ für alle $g \in G$ erfüllt ist.

zu (b) „$\subseteq$“ Sei $g \in f^{-1}(f(H))$ vorgegeben. Dann ist $f(g) \in f(H)$, also $f(g) = f(h)$ für ein $h \in H$. Es folgt $f(h^{-1}g) = f(h^{-1})f(g) = f(h)^{-1}f(g) = e_{G'}$ und somit $h^{-1}g \in K$. Dies wiederum bedeutet $g = h(h^{-1}g) \in HK$. „$\supseteq$“ Sei $g \in HK$, also $g = hk$ für ein $h \in H$ und ein $k \in K$. Dann folgt $f(g) = f(hk) = f(h)f(k) = f(h) \cdot e_{G'} = f(h) \in f(H)$ und somit $g \in f^{-1}(f(H))$.

zu (c) Seien $h \in H$ und $k \in K$ vorgegeben. Die Gleichung $kh = hk$ ist äquivalent zu $khk^{-1}h^{-1} = e_G$. Wegen $H \trianglelefteq G$ ist $khk^{-1} \in H$ und $khk^{-1}h^{-1} = (khk^{-1})h^{-1} \in H$. Wegen $K \trianglelefteq G$ gilt auch $hk^{-1}h^{-1} \in K$ und $khk^{-1}h^{-1} = k(hk^{-1}h^{-1}) \in K$. Insgesamt ist damit nachgewiesen, dass $khk^{-1}h^{-1}$ in $H \cap K = \{e_G\}$ enthalten ist. Also gilt $khk^{-1}h^{-1} = e_G$.

zu (d) Sei G die symmetrische Gruppe S_3 und $U = \langle(1\ 2)\rangle = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$. Dann gilt einerseits $(1\ 3)U = \{(1\ 3) \circ \mathrm{id}, (1\ 3) \circ (1\ 2)\} = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}$, andererseits $U(1\ 3) = \{\mathrm{id} \circ (1\ 3), (1\ 2) \circ (1\ 3)\} = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Es gilt also $(1\ 3)U \neq U(1\ 3)$, was zeigt, dass U kein Normalteiler von S_3 ist.