Aufgabe F20T2A5

Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $x^8 - 2$. Sei ferner $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{8}) \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\zeta)$.

(b) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ hat den Grad $[L : \mathbb{Q}] = 16$.

(c) Die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch und hat einen Normalteiler der Ordnung 4 mit $N \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Hinweis / Kommentar:

In Teil (a) zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel, dass $\cos(\frac{1}{4}\pi)$ in $\mathbb{Q}(\zeta)$ enthalten ist, und bestimmen Sie (mittels trigonometrischer Formeln) den Wert $\cos(\frac{1}{4}\pi)$ explizit. Für Teil (b) zeigt man zunächst, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, i)$ ist, danach ist die Berechnung des Erweiterungsgrades reine Routine.

Der erste Teil von (c) kann ebenfalls mit einer Standardmethode gelöst werden, nämlich durch die Betrachtung des Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2})$. Einen Normalteiler erhält man üblicherweise durch eine normale Teilerweiterung. Hier ist es naheliegend, den Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta)$ zu betrachten. Es bleibt zu zeigen, dass der zugehörige Normalteiler isomorph zu $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ist. Weisen Sie hierfür zunächst mit dem Fortsetzungssatz nach, dass in G ein Element der Ordnung 8 existiert. Wie ein solches Element aussieht, dürfte durch ähnliche Aufgaben bekannt sein.