

### Aufgabe F20T2A4

- (a) Sei  $h : A \rightarrow G$  ein surjektiver Gruppenhomomorphismus einer abelschen Gruppe  $A$  in eine Gruppe  $G$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $G$  abelsch ist.
- (b) Sei  $p$  eine Primzahl,  $p \neq 2$ . Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms  $f(X) = x^2 + 2x + 1$  in  $\mathbb{F}_{p^2}$  und in  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ .
- (c) Man zeige oder widerlege folgende Aussage: Für alle  $a, b, c \in \mathbb{N}$  gilt  $\text{ggT}(a, b, c)\text{kgV}(a, b, c) = abc$ .

#### *Hinweis/Kommentar:*

Teil (a) ist eine leichte Routineaufgabe. Bei Teil (b) kommt man durch die Körpereingeschaft. Es ist aber wichtig zu beachten, dass die Implikation  $(\alpha + \bar{1})^2 = 0 \Rightarrow \alpha + \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  nicht gültig ist, da es sich bei diesem Ring nicht um einen Körper handelt! Um eine Idee zu bekommen, wieviele Nullstellen das Polynom über  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  haben könnte, betrachten Sie es zunächst über  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Machen Sie sich klar, dass wenn  $c + p\mathbb{Z}$  eine Nullstelle in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ist, das Element  $c + p^2\mathbb{Z}$  eine Nullstelle in  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  ist, für beliebiges  $c \in \mathbb{Z}$ . Welche Nullstellen in  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  gibt es dann noch?

Die Aussage in Teil (c) ist falsch. Um sie zu widerlegen, betrachten Sie für  $a, b, c$  geeignete Potenzen einer festen Primzahl, zum Beispiel 5. Auf diese Weise findet man schnell ein Gegenbeispiel. Das Ergebnis ist ein wenig überraschend, da die entsprechende Aussage für zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$  wahr ist. Dies überprüft man leicht anhand der Primfaktorzerlegung von  $a$  und  $b$  und den Formeln für ggT und kgV basierend auf der Primfaktorzerlegung.