Aufgabe F20T2A3

Seien p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^k}$ eine Körpererweiterung vom Grad k über dem Körper $\mathbb{F}_p$. Betrachten Sie die Gruppe $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^k})$ der invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{F}_{p^k}$. Zeigen Sie:

(a) Die Teilmenge $N := \{A \in G \mid \det(A) \in \mathbb{F}_p\}$ ist ein Normalteiler.

(b) Der Index des Normalteilers N ist teilerfremd zu p.

(c) Die p-Sylowgruppen von G sind genau die p-Sylowgruppen von N.

Hinweis / Kommentar:

Teil (a) kann man direkt überprüfen, man kann aber auch verwenden, dass Urbilder von Normalteiler unter Gruppenhomomorphismen laut Vorlesung selbst Normalteiler sind. Teil (b) beweist man durch Anwendung des Homomorphiesatzes. Welcher naheliegende Homomorphismus besitzt N als Kern? In Teil (c) besteht das Hauptproblem im Nachweis, dass jede p-Sylowgruppe P von G in N enthalten ist. Betrachten Sie die Faktorgruppe PN/P, und verwenden Sie die Isomorphiesätze der Gruppentheorie, um zu zeigen, dass diese Faktorgruppe trivial ist. (Dieser Trick ist vom Beweis der Sylowsätze abgeschaut.)