Aufgabe F20T2A3

Seien p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^k}$ eine Körpererweiterung vom Grad k über dem Körper $\mathbb{F}_p$. Betrachten Sie die Gruppe $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^k})$ der invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{F}_{p^k}$. Zeigen Sie:

(a) Die Teilmenge $N := \{A \in G \mid \det(A) \in \mathbb{F}_p\}$ ist ein Normalteiler.

(b) Der Index des Normalteilers N ist teilerfremd zu p.

(c) Die p-Sylowgruppen von G sind genau die p-Sylowgruppen von N.

Lösung:

zu (a) Weil die Gruppe G aus den invertierbaren Matrizen über $\mathbb{F}_{p^k}$ besteht, gilt $\det(A) \neq \bar{0}$, also $\det(A) \in \mathbb{F}_{p^k}^\times$ für alle $A \in G$. Die Gruppe $\mathbb{F}_p^\times$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{F}_{p^k}^\times$, denn es gilt $\bar{1} \in \mathbb{F}_p^\times$, und für alle $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{F}_p^\times$ gilt auch $\bar{a}\bar{b} \in \mathbb{F}_p^\times$ und $\bar{a}^{-1} \in GFp^\times$. Darüber hinaus ist $\mathbb{F}_p^\times$ sogar ein Normalteiler von $\mathbb{F}_{p^k}^\times$, denn die Gruppe $\mathbb{F}_{p^k}^\times$ ist abelsch, und in einer abelschen Gruppe sind alle Untergruppen Normalteiler. Nun ist N nach Definition das Urbild des Normalteilers $\mathbb{F}_p^\times \trianglelefteq \mathbb{F}_{p^k}^\times$ unter dem Homomorphismus $\det : G \to \mathbb{F}_{p^k}^\times$, und laut Vorlesung ist jedes Urbild eines Normalteilers unter einem Gruppenhomomorphismus ebenfalls ein Normalteiler. Daraus folgt $N \trianglelefteq G$.

zu (b) Wir betrachten den Abbildung $\phi : G \to \mathbb{F}_{p^k}^\times/\mathbb{F}_p^\times$, $A \mapsto \det(A)\mathbb{F}_p^\times$. Als Komposition der Determinantenabbildung mit dem kanonischen Epimorphismus $\alpha \mapsto \alpha\mathbb{F}_p^\times$ handelt es sich um einen Gruppenhomomorphismus. Der Kern von ϕ ist gleich N, denn für alle A gilt die Äquivalenz

$$A \in \ker(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(A) = e_{\mathbb{F}_{p^k}^\times/\mathbb{F}_p^\times} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A)\mathbb{F}_p^\times = \mathbb{F}_p^\times \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \in \mathbb{F}_p^\times \quad \Leftrightarrow \quad A \in N.$$

Außerdem ist ϕ surjektiv, denn für vorgegebenes $\alpha\mathbb{F}_p^\times \in \mathbb{F}_{p^k}/\mathbb{F}_p^\times$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_{p^k}^\times$ ist

$$C_\alpha \quad = \quad \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \alpha \end{pmatrix}$$

wegen $\det(C_\alpha) = \alpha \neq \bar{0}$ eine invertierbare Matrix, also ein Element aus G, und es gilt $\phi(\alpha) = \det(C_\alpha)\mathbb{F}_p^\times = \alpha\mathbb{F}_p^\times$.

Damit sind alle Voraussetzungen des Homomorphiesatzes erfüllt, und wir erhalten einen Isomorphismus $G/N \cong \mathbb{F}_{p^k}^\times/\mathbb{F}_p^\times$. Es folgt

$$(G : N) \quad = \quad |G/N| \quad = \quad |\mathbb{F}_{p^k}^\times/\mathbb{F}_p^\times| \quad = \quad \frac{|\mathbb{F}_{p^k}^\times|}{\mathbb{F}_p^\times} \quad = \quad \frac{p^k - 1}{p - 1} \quad = \quad \sum_{i=0}^{k-1} p^i.$$

Wegen $p^i \equiv 0 \bmod p$ für $1 \leq i \leq k-1$ folgt $(G : N) = \sum_{i=0}^{k-1} p^i \equiv 1 \bmod p$, insbesondere gilt $p \nmid (G : N)$. Weil p eine Primzahl ist, ist dies gleichbedeutend damit, dass p und $(G : N)$ teilerfremd sind.

zu (c) Sei P eine Untergruppe von G. Wir zeigen, dass P genau dann eine p-Sylowgruppe von G ist, wenn P eine p-Sylowgruppe von N ist. Dabei verwenden wir, dass allgemein eine Untergruppe P einer endlichen Gruppe G genau dann eine p-Sylowgruppe ist, wenn $|P|$ von p-Potenzordnung ist und $p \nmid (G : P)$ gilt. „$\Leftarrow$“ Weil P eine p-Sylowgruppe von N ist, gilt $p \nmid (N : P)$. Es gilt

$$(G : P) \quad = \quad \frac{|G|}{|P|} \quad = \quad \frac{|G|}{|N|} \cdot \frac{|N|}{|P|} \quad = \quad (G : N) \cdot (N : P).$$

Aus $p \nmid (G : N)$ und $p \nmid (N : P)$ folgt $p \nmid (G : P)$. Außerdem ist P (als p-Sylowgruppe von N) von p-Potenzordnung. Also ist P eine p-Sylowgruppe von G.

„$\Rightarrow$" Sei P eine p-Sylowgruppe von G. Auf Grund des Ersten Isomorphiesatzes gilt $P/(N \cap P) \cong PN/N$. Weil P von p-Potenzordnung ist, gilt dasselbe für $P/(N \cap P)$ und damit auch für PN/N. Es handelt sich bei PN/N also um eine p-Untergruppe von G/N. Weil aber $|G/N| = (G : N)$ nach Teil (b) teilerfremd zu p ist, muss $PN/N = \{e_{G/N}\}$ sein, also $PN = N$ und somit $P \subseteq N$ gelten. Es ist P also eine p-Untergruppe von N. Wäre p ein Teiler von $(N : P)$, dann wäre p erst recht ein Teiler von $(G : P) = (G : N) \cdot (N : P)$. Aber dies ist nicht der Fall, weil P eine p-Sylowgruppe von G ist. Insgesamt ist damit gezeigt, dass P eine p-Sylowgruppe von N ist.