

Aufgabe F20T2A2

Zeigen Sie:

- (a) Ist $n = dm$ mit ungeradem $m \in \mathbb{N}$, so gilt die Teilbarkeitsrelation $(x^d + 1) \mid (x^n + 1)$.
- (b) Das Polynom $x^n + 1$ ist genau dann über \mathbb{Q} irreduzibel, wenn $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Hinweis/Kommentar:

In Teil (a) weisen Sie die Teilbarkeitsrelation anhand der Nullstellen nach. Die komplexen Nullstellen von $x^{2d} - 1$ sind genau die $2d$ -ten Einheitswurzeln. Was bedeutet das für die Nullstellen von $x^d + 1$? Eine Implikationsrichtung von Teil (b) kann nun mit Teil (a) abgeleitet werden. Für die andere Richtung denken Sie daran, dass Kreisteilungspolynome laut Vorlesung über \mathbb{Q} irreduzibel sind.